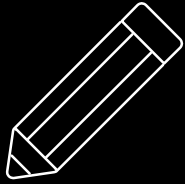
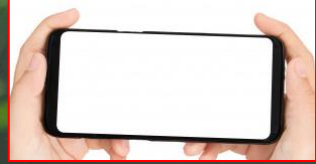


Aula 6



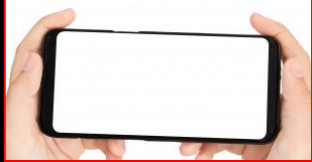
GAAL

ENG. DE ALIMENTOS



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira





Aula – 6

1. Matriz Diagonal

1.1 Potência de Matriz

2. Autovalores e autovetores

2.1 Equação Característica;

2.2 Polinômio Característico



“

Matriz Diagonal

Matriz Diagonal – M.D.



É uma matriz quadrada, A , de ordem n , onde:

$$A_n: \begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \\ a_{ij} \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Potência de M.D.



Use o symbolab para verificar

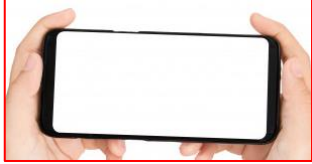
$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Potência de M.D.



Use o symbolab para verificar

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

Potência de M.D.



Use o symbolab para verificar

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$$

$$A^k = A^{k-1} \cdot A$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 3^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$$

Potência de Qualquer



Use o symbolab para verificar

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (?) A^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & (-1)^2 \\ 4^2 & 3^2 \end{bmatrix}$$

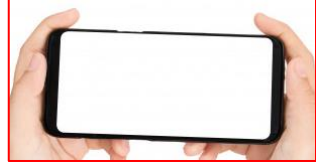
$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$$

Não vale a regra !!!

Autovalor e Autovetor



Sejam A uma matriz $n \times n$, v um vetor *não-nulo* de \mathbb{R}^n , e λ um escalar. Se a equação vetorial

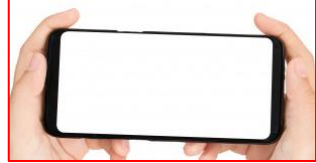
$$Av = \lambda v \quad (\text{com } v \neq 0) \quad (8.10)$$

for válida, diremos que v é um *autovetor* e que λ é um *autovalor* da matriz A . Diremos, mais precisamente, que v é um *autovetor de A associado ao autovalor λ* .

Atenção: v é um vetor, ou seja, $v = V = [v_{12} \quad \dots \quad v_{1n}]^t$

Equação característica

Polinômio característico



Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ será um autovalor de A se e somente se satisfizer a relação $\det(A - \lambda I) = 0$.

A equação $\det(A - xI) = 0$, onde x é uma “incógnita” escalar, é chamada a equação característica da matriz A . O teorema acima diz que os autovalores de uma matriz são exatamente as soluções de sua equação característica.

Pode-se demonstrar que, se A for uma matriz $n \times n$, então $\det(A - xI)$ será um polinômio de grau n na variável x . Este é chamado o polinômio característico de A . Denota-se o polinômio característico de A por $p_A(x)$.

Exemplo

Encontre o polinômio característico da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$



Exemplo

Encontre o polinômio característico da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$



Exercício

Encontre o polinômio característico da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Propriedades



Se A é uma matriz $n \times n$ triangular (superior ou inferior), então seus autovalores são dados pelas entradas em sua diagonal principal.

Recorde que o polinômio característico de uma matriz $n \times n$ é um polinômio de grau n , e que suas raízes são os autovalores da matriz em questão. Assim, uma matriz de tamanho $n \times n$ terá exatamente n autovalores, se contarmos os autovalores complexos e as multiplicidades. Isso decorre do “teorema fundamental da álgebra”, que diz que todo polinômio de grau n tem exatamente n raízes (se contarmos as multiplicidades e as raízes complexas).