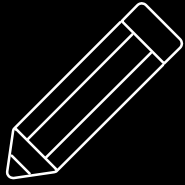
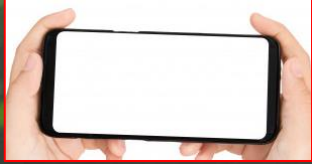


Aula 6 – 2º Bim



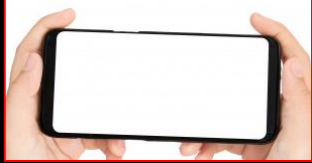
GAAL

ENG. DE ALIMENTOS



Prof. Dr. Paulo A. Oliveira





Aula 6 – 2º Bim.

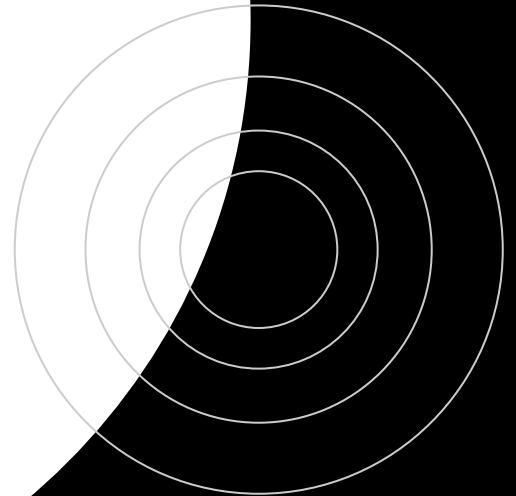
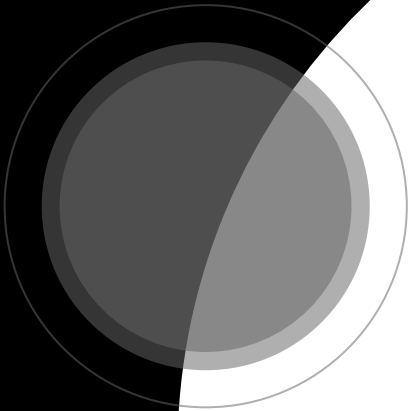
1 - Cônicas – teoria geral

Circunferências

Elipse

Parábolas

Hipérboles

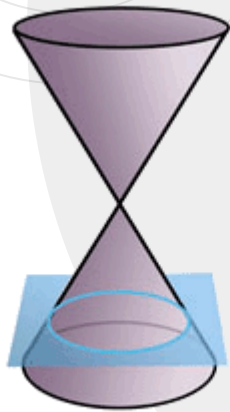


CÔNICAS

// Tratamento geométrico



Parábola



Circunferência



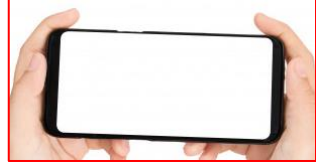
Elipse



Hipérbole



CÔNICAS



A equação geral do segundo grau em duas variáveis é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde

A, B, C, D, E, F são constantes reais, e pelo menos um entre A, B, C é diferente de zero.

CÔNICAS



reduzida dada por:

- Equação reduzida da **elipse**, com centro na origem do sistema de coordenadas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ são os vértices da elipse. Observe que uma circunferência é uma elipse onde $a = b = r$, que é o raio da circunferência ($x^2 + y^2 = r^2$).

- Equação reduzida da **parábola**, com vértice na origem do sistema de coordenadas:

$$y^2 = 4px \quad \text{ou} \quad y^2 = -4px \quad \text{ou} \quad x^2 = 4py \quad \text{ou} \quad x^2 = -4py$$

onde a primeira equação representa uma parábola com foco $(p, 0)$, a segunda com foco $(-p, 0)$, a terceira com foco $(0, p)$, e a quarta uma parábola com foco $(0, -p)$.



CÔNICAS x Matrizes



Podemos escrever a cônica na forma **quadrática matricial**:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0.$$

Ou, mais compactamente: $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{x} + F = 0$,

onde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}$.

A matriz \mathbf{Q} é chamada de **matriz característica** da cônica.

Cônicas: Classificação



A classificação é feita analisando o determinante e os autovalores de Q .

$$\Delta = \det(Q) = AC - \left(\frac{B}{2}\right)^2 = AC - \frac{B^2}{4}.$$

- Elipse (inclui círculo): $\Delta > 0$
- Parábola: $\Delta = 0$
- Hipérbole: $\Delta < 0$

Cônicas: Classificação



Usando autovalores de Q

Os autovalores determinam a “curvatura” nos eixos principais:

- **Elipse** → dois autovalores **mesmo sinal** (ambos positivos ou ambos negativos).
- **Parábola** → um autovalor **zero** e outro **não nulo**.
- **Hipérbole** → autovalores de **sinais opostos**.

Isso corresponde exatamente ao teste do determinante, pois:

$$\det(Q) = \lambda_1 \lambda_2.$$

Cônicas: Resumo classificação



Cônica	Δ	Critério (autovalores)
Elipse	> 0	λ_1, λ_2 mesmo sinal
Parábola	$= 0$	Um autovalor zero
Hipérbole	< 0	Autovalores de sinais opostos

CÔNICAS



Exemplo 1: Considere a equação da cônica: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, em coordenadas canônicas do R^2 . Esta equação não está na forma reduzida, e não sabemos definir qual é o tipo de cônica. Mas, podemos escrevê-la como:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = x^2 - 6x + (9 - 9) + y^2 - 4y + (4 - 4) + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 9 - 4 + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Fazendo uma mudança de referencial da forma: $x_1 = x - 3$ e $y_1 = y - 2$, obtemos:

$$x_1^2 + y_1^2 = 4$$

E assim, podemos identificar a cônica como sendo uma circunferência de raio 2, centrada no ponto $(3, 2)$, com relação ao referencial canônico xy .

Cônicas: Círculo

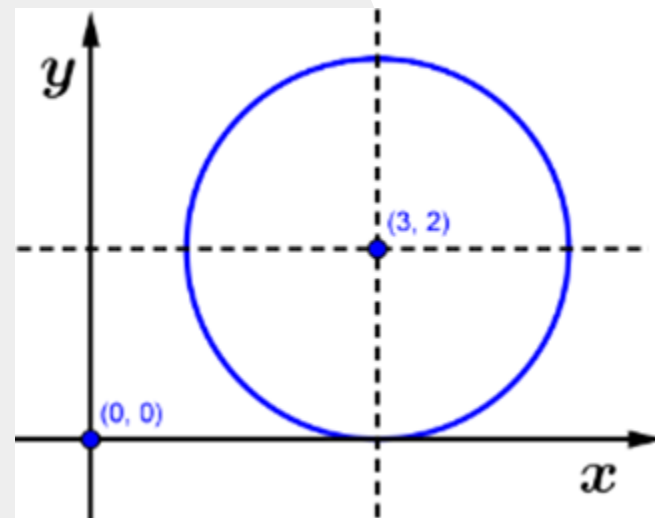


Centro em $(0, 0)$:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Transladado (centro em (h, k)):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



Cônica: Elipse



Eixo maior horizontal

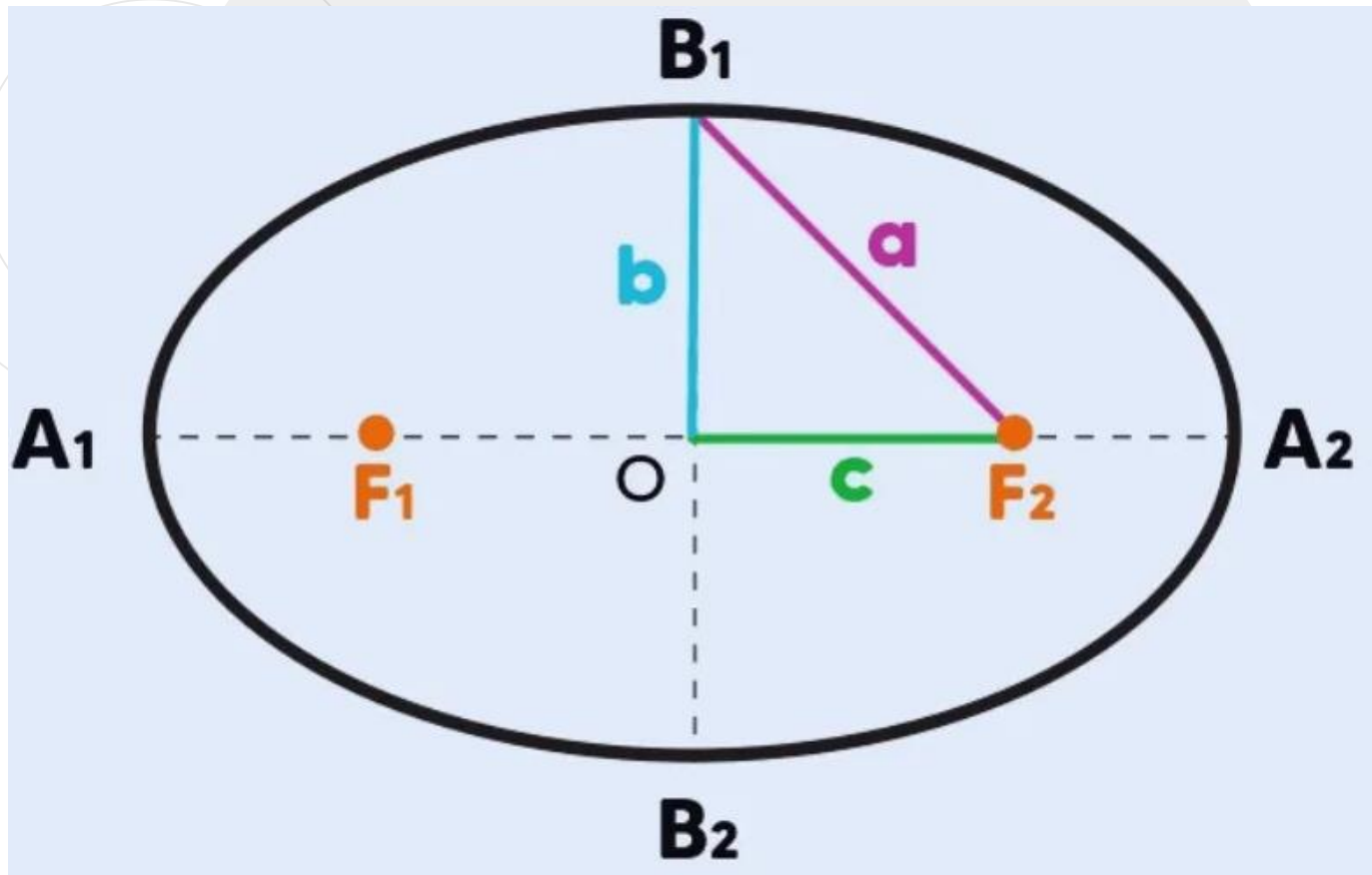
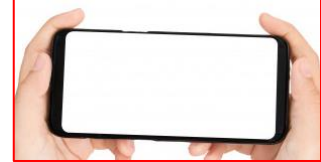
Centro em $(0, 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Transladada (centro em (h, k)):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Cônica: Elipse



Cônica: Elipse

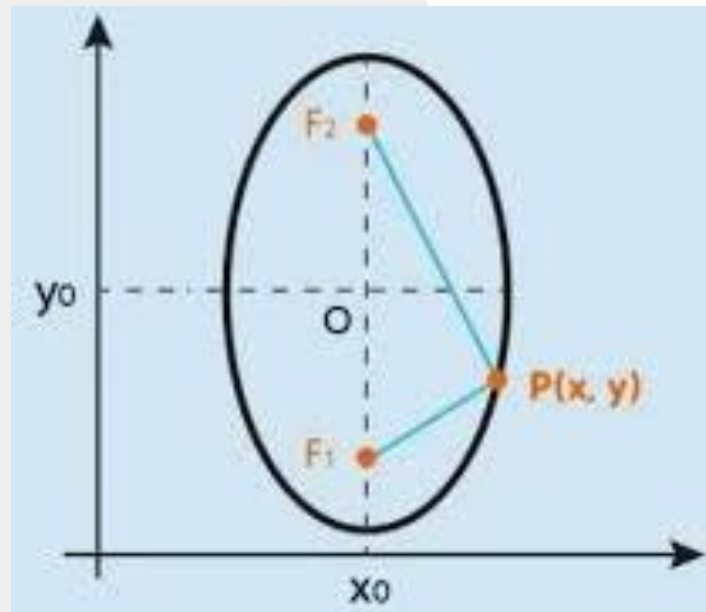
Eixo maior vertical

Centro em $(0, 0)$:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Transladada:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$



Cônica: Parábola



Abertura vertical

Vértice em $(0, 0)$:

$$x^2 = 4p y$$

Transladada (vértice em (h, k)):

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Abertura horizontal

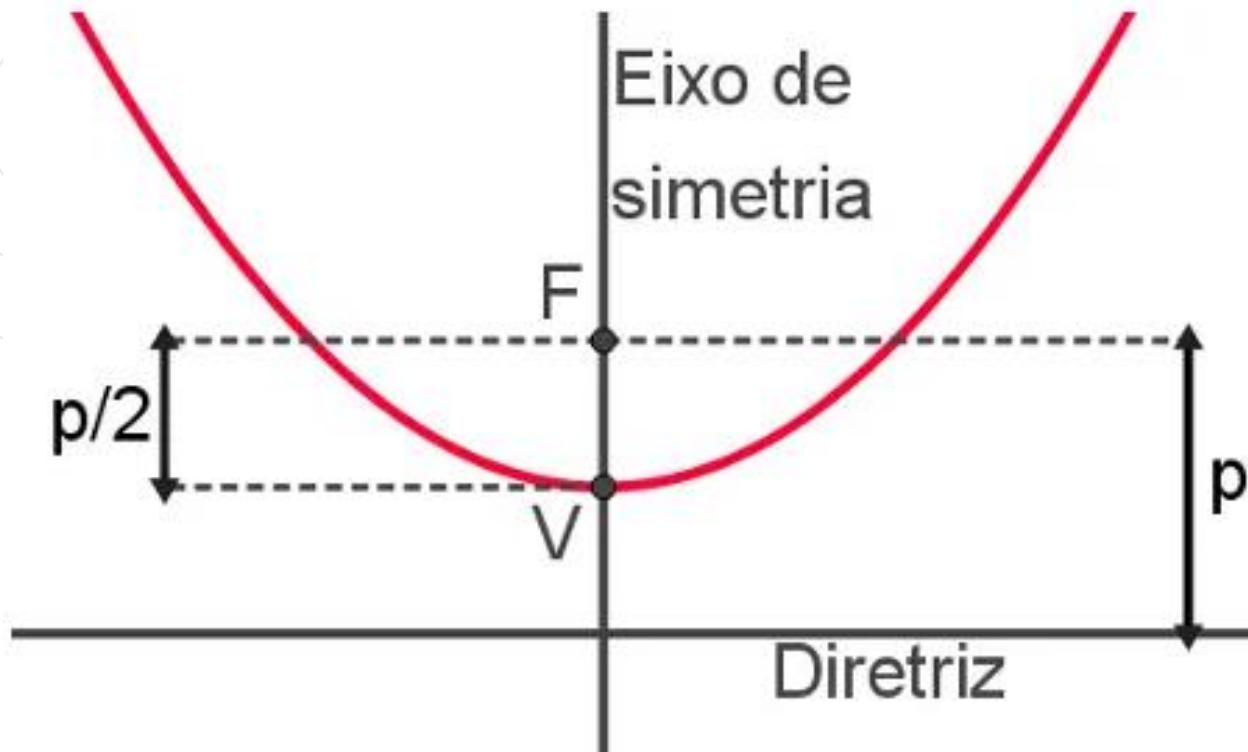
Vértice em $(0, 0)$:

$$y^2 = 4p x$$

Transladada:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Cônica: Parábola



Cônica: Hipérbole



Transversa horizontal

Centro em $(0, 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Transladada (centro em (h, k)):

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Cônica: Hipérbole

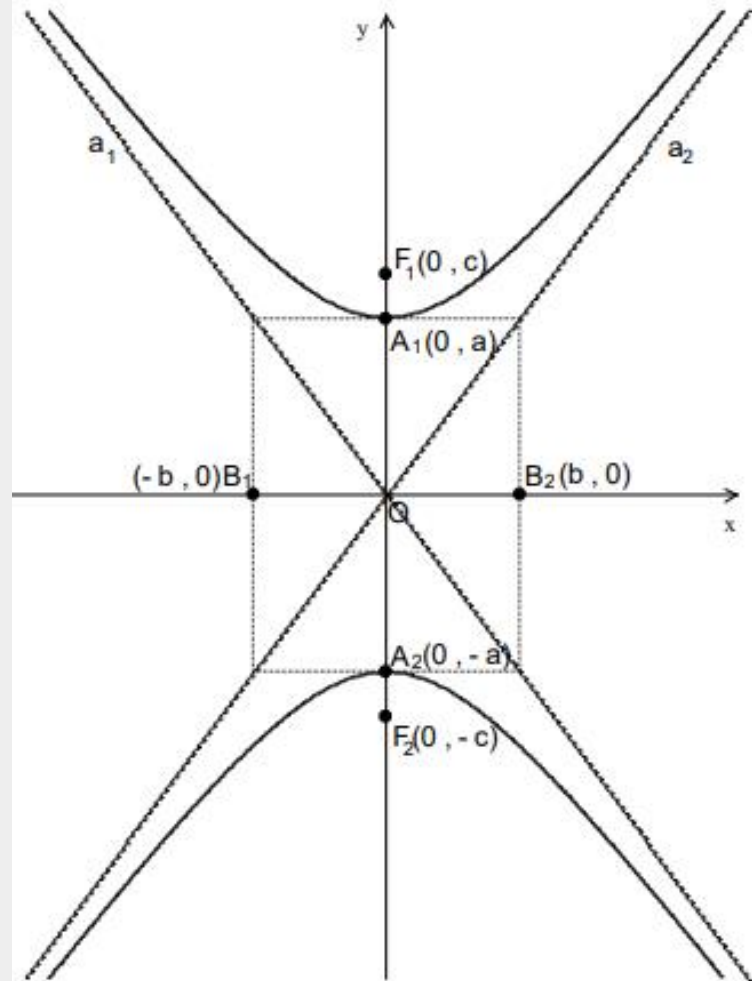
Transversa vertical

Centro em $(0, 0)$:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Transladada:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$



Assíntotas: $y = \pm \frac{a}{b}x$

Cônica: Exercícios



Exercício 1 — Circunferência

Escreva a equação reduzida da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 5.

Exercício 2 — Circunferência

Determine a equação reduzida da circunferência cujo centro é $(3, -2)$ e cujo raio mede 4.

Exercício 3 — Circunferência

Encontre a equação reduzida da circunferência de centro $(-1, 1)$ e raio igual a 2.





Exercício 4 — Elipse

Obtenha a equação reduzida da elipse de centro $(0, 0)$, com eixo maior horizontal, semi-eixo maior $a = 6$ e semi-eixo menor $b = 4$.

Exercício 5 — Elipse

Escreva a equação reduzida da elipse de centro $(2, -1)$, eixo maior horizontal, semi-eixo maior $a = 5$ e semi-eixo menor $b = 3$.

Exercício 6 — Elipse

Determine a equação reduzida da elipse de centro $(0, 0)$, com eixo maior vertical, semi-eixo maior $a = 7$ e semi-eixo menor $b = 2$.



Exercício 7 — Hipérbole

Encontre a equação reduzida da hipérbole de centro $(0, 0)$, de transverso horizontal, com $a = 3$ e $b = 2$.

Exercício 8 — Hipérbole

Obtenha a equação reduzida da hipérbole de centro $(1, 2)$, de transverso horizontal, com $a = 4$ e $b = 3$.

Exercício 9 — Hipérbole

Determine a equação reduzida da hipérbole de centro $(0, 0)$, de transverso vertical, com $a = 5$ e $b = 4$.