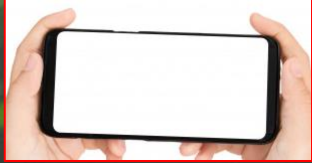
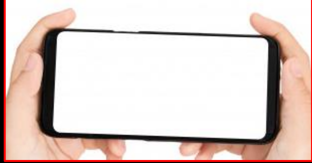
Aula 5 – 2º bim.

G A A L

ENG. DE ALIMENTOS

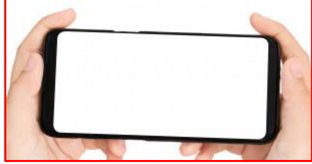
Prof. Dr. Paulo A. Oliveira





Aula 5 – 2º Bim

1. Estudo vetorial do plano
2. Equações geral
3. Ângulo entre planos
4. Distâncias

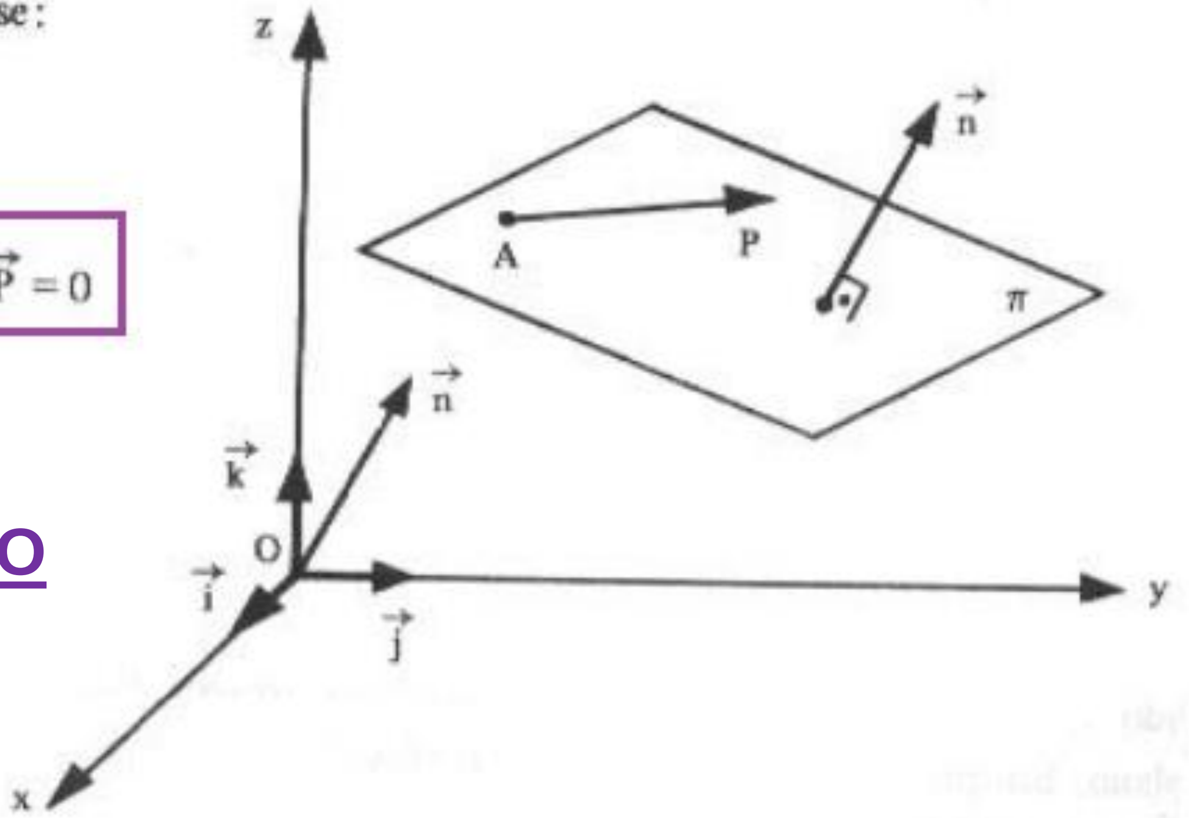


ESTUDO VETORIAL DO PLANO

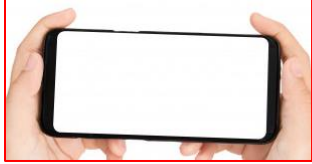
Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $\vec{n} \neq (0, 0, 0)$ um vetor normal (ortogonal) ao plano. O plano π pode ser definido como sendo o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$ (Fig. 5.1-a). O ponto P pertence a π se, e somente se:

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0}$$

EQUAÇÃO VETORIAL DO PLANO



Equação do Plano



Tendo em vista que: $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{AP} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$,

a equação (5.1-I) fica: $(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$

ou: $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

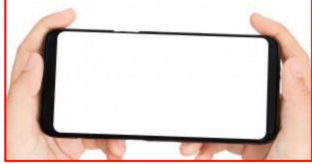
ou, ainda: $ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$

Fazendo: $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, vem:

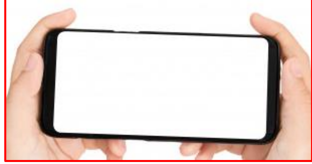
$$ax + by + cz + d = 0$$

Esta é a equação *geral* ou *cartesiana* do plano π.

Exemplos: Equação do Plano



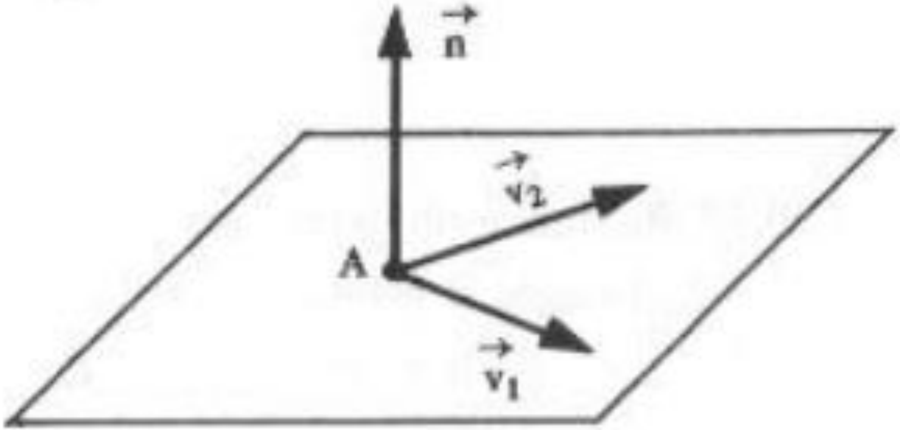
Determinar a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$, sendo $\vec{n} = (3, 2, -4)$ um vetor normal a π.

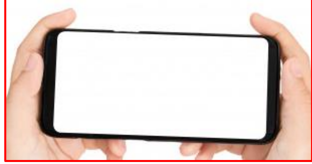


Determinação do Plano

1) passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares.

Neste caso: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;

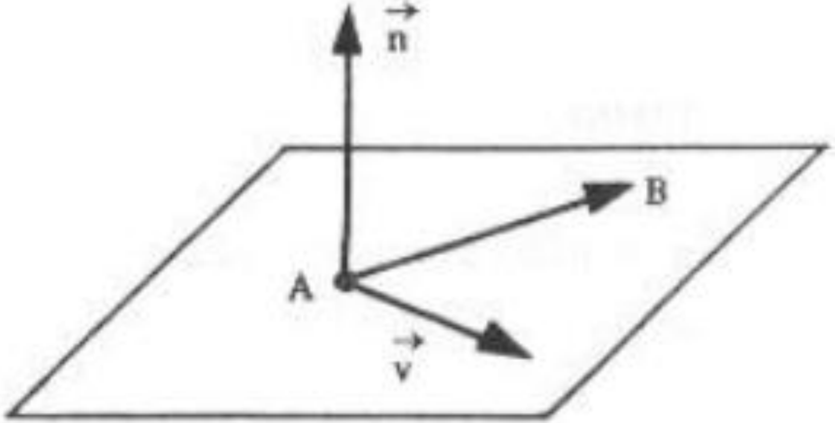




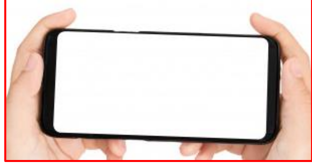
Determinação do Plano

2) passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\vec{v}$ não colinear ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

Neste caso: $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$;

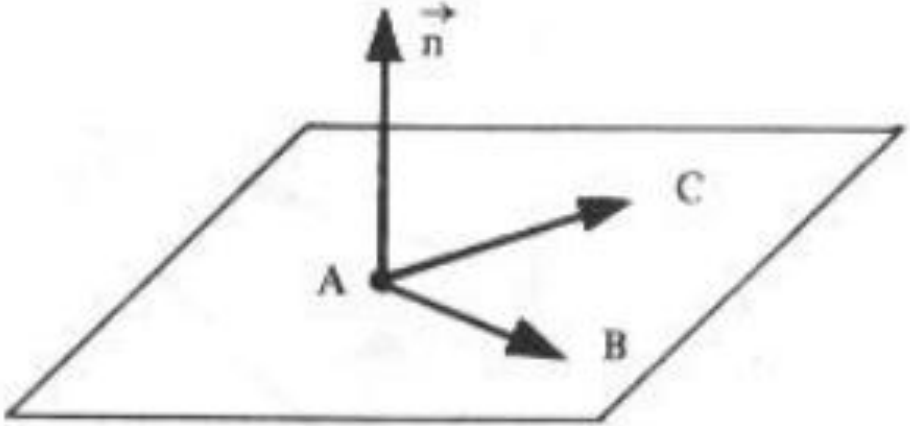


Determinação do Plano

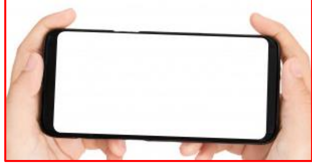


3) passa por três pontos A, B e C não em linha reta.

Neste caso: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$;

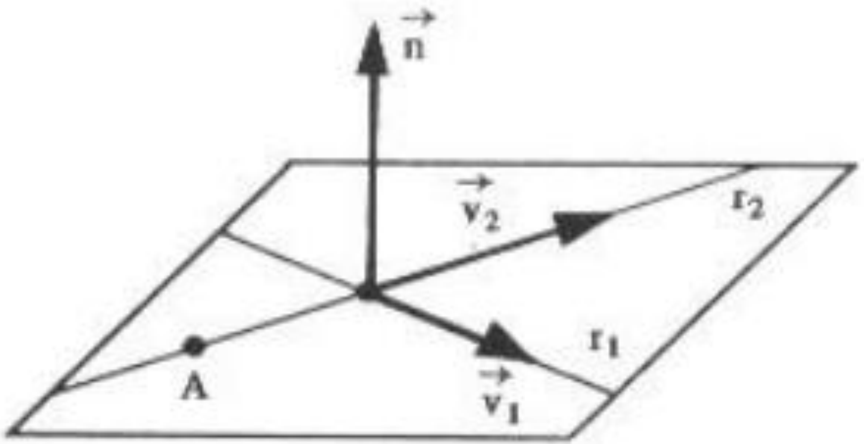


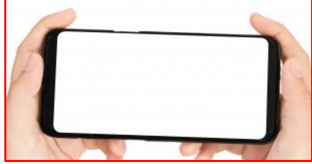
Determinação do Plano



4) contém duas retas r_1 e r_2 concorrentes.

Neste caso: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores diretores de r_1 e r_2;

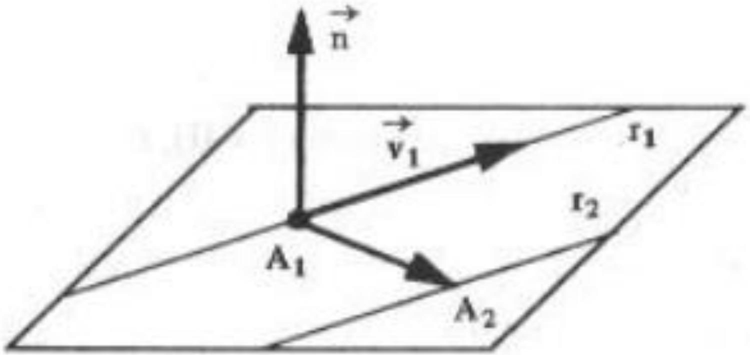


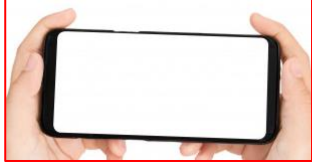


Determinação do Plano

5) contém duas retas r_1 e r_2 paralelas.

Neste caso: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2}$, sendo $\vec{v}_1$ um vetor diretor de r_1 (ou r_2) e $A_1 \in r_1$ e $A_2 \in r_2$.

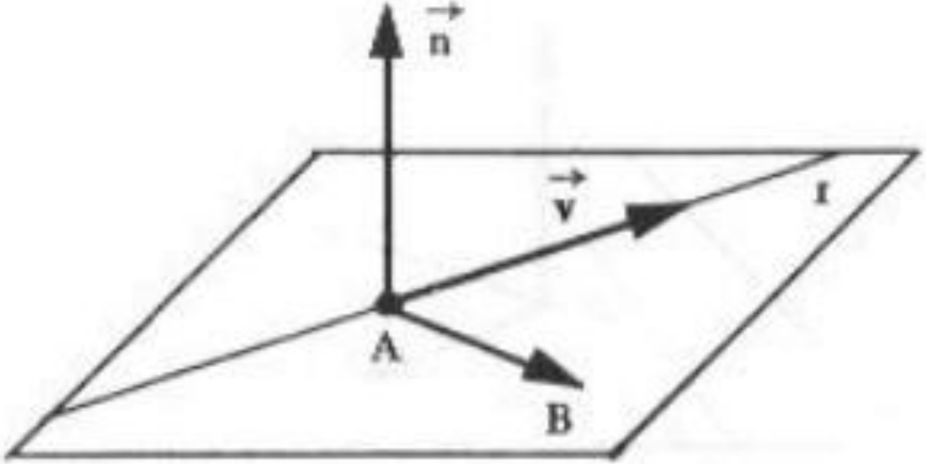




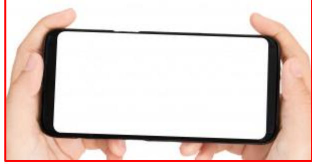
Determinação do Plano

6) contém uma reta r e um ponto $B \notin r$.

Neste caso: $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$, sendo $\vec{v}$ um vetor diretor de r e $A \in r$.



Exemplos: Equação do Plano

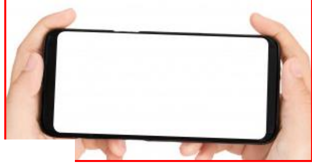


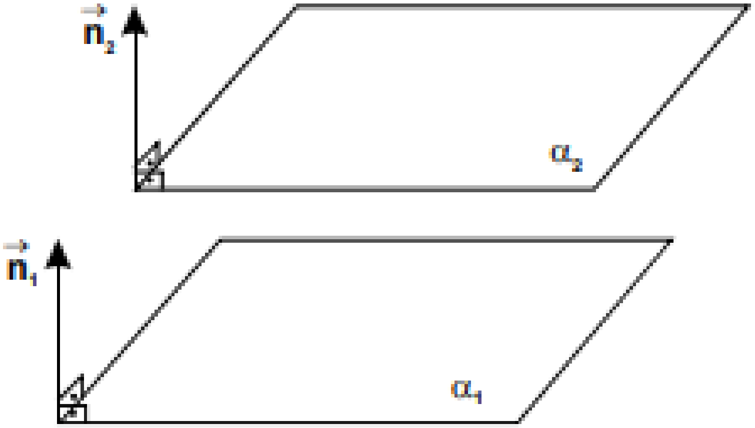
Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1, -3, 4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1, 1)$.

Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(2, 1, -2)$ e é perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Planos Paralelos



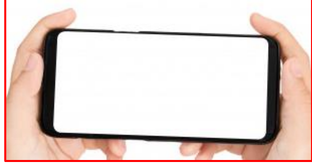


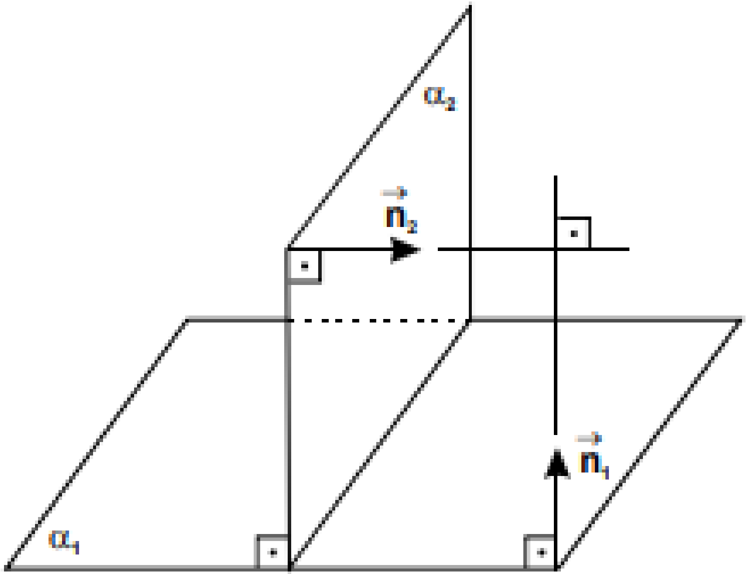
Os planos α_1 e α_2 são paralelos se, e somente se, os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ o forem, isto é, se e somente se, os coeficientes das variáveis homônimas forem proporcionais:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Em particular, os planos α_1 e α_2 serão coincidentes se: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$. Neste caso, a equação do plano α_2 é o produto da equação de α_1 por uma constante k.

Planos Ortogonais

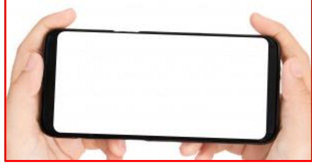


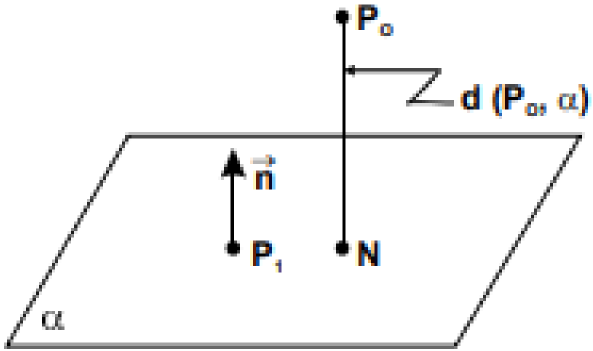


A condição de ortogonalidade de α_1 e α_2 é a mesma condição de ortogonalidade dos vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Distância – Plano x Ponto





Dados:

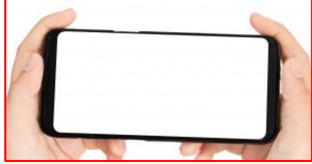
$P_o = (x_o, y_o, z_o)$

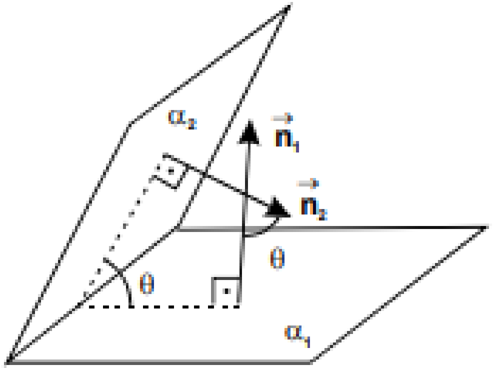
$\alpha: ax + by + cz + d = 0$

Com o escopo de utilizar a fórmula da página 135, consideremos um ponto genérico $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de α e o vetor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, ortogonal a α.

$$d(P_o, \alpha) = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ângulo entre Planos





Dados:

$\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Sejam:

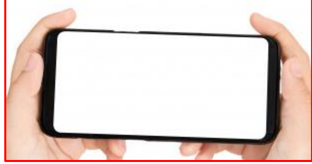
$\vec{n}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{n}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

os vetores normais dos planos α_1 e α_2, respectivamente. Considere θ o menor ângulo entre os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Por construção, θ também é o menor ângulo entre os planos α_1 e α_2. Do produto escalar:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} \quad (\text{com } 0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$$

$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Exercício – Ângulo entre Planos



01. Dados os planos α_1: $x + 2y - 3z - 1 = 0$ e α_2: $3x - y + 2z - 5 = 0$, obter:

b) o ângulo agudo entre os planos α_1 e α_2.