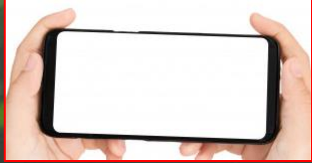
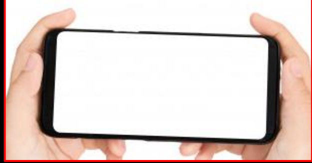
Aula 4 – 2º bim.



G A A L

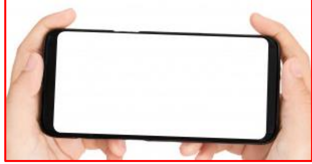
ENG. DE ALIMENTOS

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



Aula 4 – 2º Bim

1. Estudo vetorial da reta
2. Equações VPS
3. Ângulo entre retas
4. Distâncias



Equação Vetorial da Reta

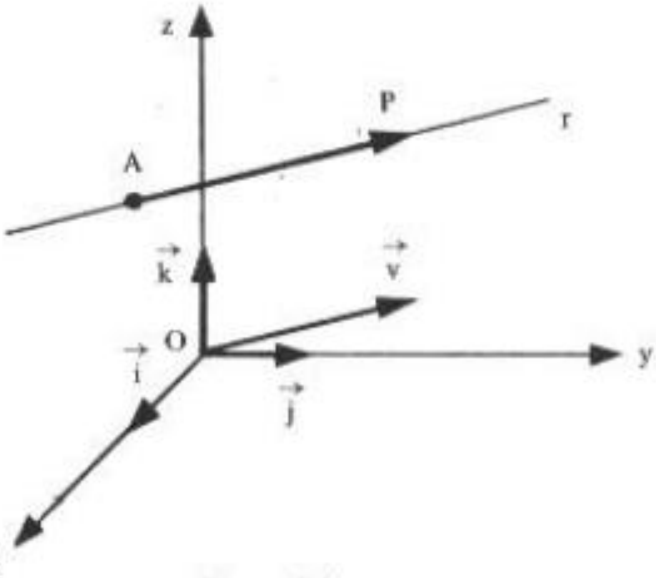
Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do *espaço* pertença à reta r, é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam colineares (Fig. 4.1), isto é:

$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$ ou: $P - A = t\vec{v}$

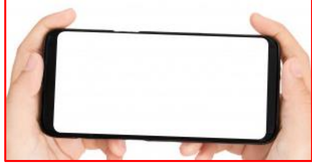
ou:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c),$$

se $P(x, y, z)$, $A(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$.



Outras Equações da Reta



Paramétrica

Da equação vetorial da reta r:

$$P = A + t\vec{v},$$

ou:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

ou, ainda:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z + ct)$$

vem:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Simétrica

Das equações paramétricas (4.2), supondo $abc \neq 0$, vem:

$$t = \frac{x - x_1}{a}$$

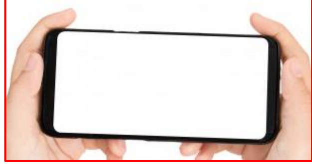
$$t = \frac{y - y_1}{b}$$

$$t = \frac{z - z_1}{c}$$

logo:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

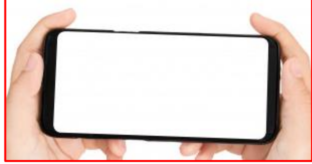
Exercícios



1) Determinar as equações da reta que passa pelo ponto $A(-2, 3, -2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.

2) Estabelecer as equações da reta que passa pelos pontos $A(1, 0, 9)$ e $B(4, 8, 9)$.

Ângulo entre Retas



Sejam as retas r_1, que passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e r_2, que passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ (Fig. 4.7).

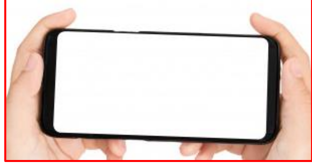
Chama-se *ângulo de duas retas* r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}, \quad \text{com } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Retas Paralelas / Ortogonais

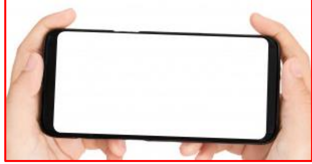


A condição de paralelismo das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, que definem as direções dessas retas, isto é:

$$\boxed{\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 \qquad \text{ou:} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ que definem as direções dessas retas, isto é:

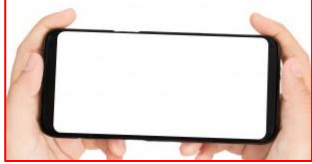
$$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \qquad \text{ou:} \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$



Retas Paralelas / Ortogonais

Exemplo - Verifique se as retas abaixo são paralelas ou ortogonais:

$$r_1: \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4}$$

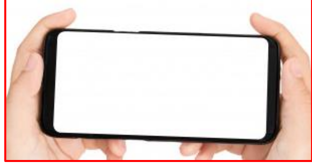


Retas Paralelas / Ortogonais

Exemplo – Encontre o valor de “m” para que as retas sejam paralelas.

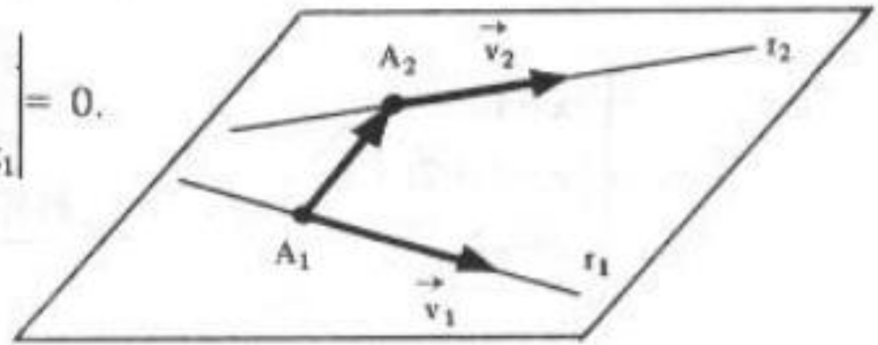
$$r_1: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{m} = \frac{3-z}{4}$$

Retas Coplanares

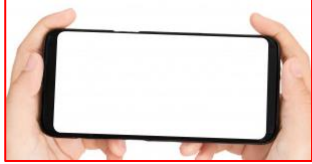


A reta r_1, que passa por um ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta r_2, que passa por um ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, são coplanares se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é, se for nulo o produto misto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})$ (Fig. 4.10):

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

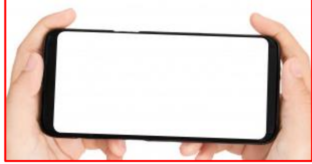


Retas Coplanares



Exemplo – Verifique que as retas abaixo são coplanares:

$$r_1 : \left\{ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \right. \quad \text{e} \quad r_2 : \left\{ \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3} \right.$$



Distância entre reta e ponto

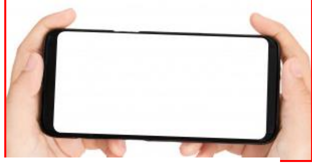
Obs.: A reta r e o ponto P devem estar no mesmo plano

No R^2:

$$r: ax + by + c = 0 \qquad P = (x_0, y_0)$$

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Exemplo



Calcule a distância entre a reta r e P = (-2,3)

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

RESP.

(i) ESCREVER A EQUAÇÃO GERAL DA RETA:

$$ax + by + c = 0$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1}$$

$$-x - 3 = 2y - 4$$

$$x + 2y - 1 = 0$$

(ii) USAR A FÓRMULA

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(P,r) = \frac{|1.(-2) + 2.(3) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$d(P,r) = \frac{|-2 + 6 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore d(P,r) \simeq 1{,}3\ u$$