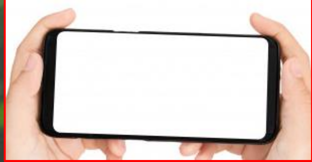
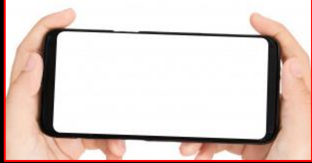


Aula 3 – 2 bim:

G A A L

ENG. DE ALIMENTOS

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



Aula 3 – 2º bim.

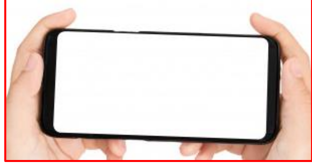
1. Revisão da aula 4- vetores;
2. Estudo vetorial da reta;

Equações: Vetorial, paramétrica e simétrica

Retas no R^2 e R^3

Ângulo entre retas

Equação Vetorial da Reta



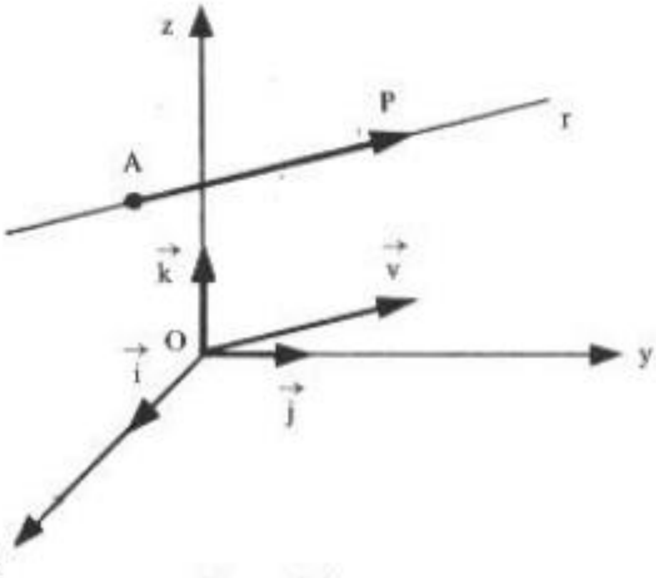
Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do *espaço* pertença à reta r, é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam colineares (Fig. 4.1), isto é:

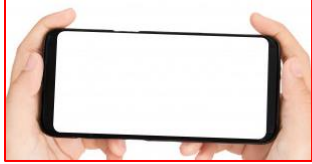
$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \qquad \text{ou:} \qquad P - A = t\vec{v}$$

ou:

$$\overset{P}{(x, y, z)} = \overset{A}{(x_1, y_1, z_1)} + t\overset{\vec{v}}{(a, b, c)},$$

se $P(x, y, z)$, $A(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$.





Outras Equações da Reta

Paramétrica

Da equação vetorial da reta r:

$$P = A + t\vec{v},$$

ou:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

ou, ainda:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z + ct)$$

vem:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Simétrica

Das equações paramétricas (4.2), supondo $abc \neq 0$, vem:

$$t = \frac{x - x_1}{a}$$

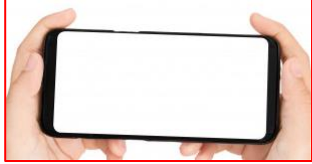
$$t = \frac{y - y_1}{b}$$

$$t = \frac{z - z_1}{c}$$

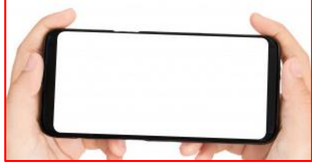
logo:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Exemplo



Encontre as equações da reta, s, que passa pelo ponto $A = (-2, 3, 5)$ na direção do vetor $v = (-2, 3, 5)$

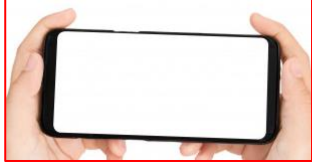


Equações da Reta no R^2

1) Determinar as equações da reta que passa pelo ponto $A(-2, 3, -2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.

2) Estabelecer as equações da reta que passa pelos pontos $A(1, 0, 9)$ e $B(4, 8, 9)$.

Ângulo entre Retas



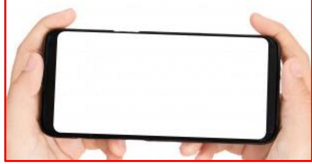
Sejam as retas r_1, que passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e r_2, que passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ (Fig. 4.7).

Chama-se *ângulo de duas retas* r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Calcular o ângulo entre as retas

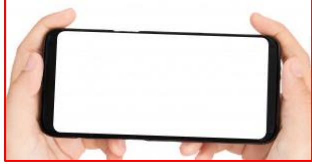
$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$



Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Retas Paralelas / Ortogonais



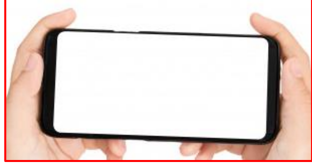
A condição de paralelismo das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, que definem as direções dessas retas, isto é:

$$\boxed{\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 \qquad \text{ou:} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ que definem as direções dessas retas, isto é:

$$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \qquad \text{ou:} \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$

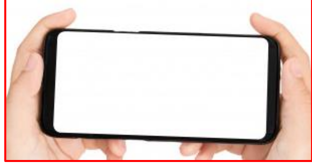
Retas Paralelas / Ortogonais



Exemplo - Verifique se as retas abaixo são paralelas ou ortogonais:

$$r_1: \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4}$$

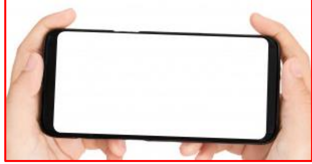
Retas Paralelas / Ortogonais



Exemplo – Encontre o valor de “m” para que as retas sejam paralelas.

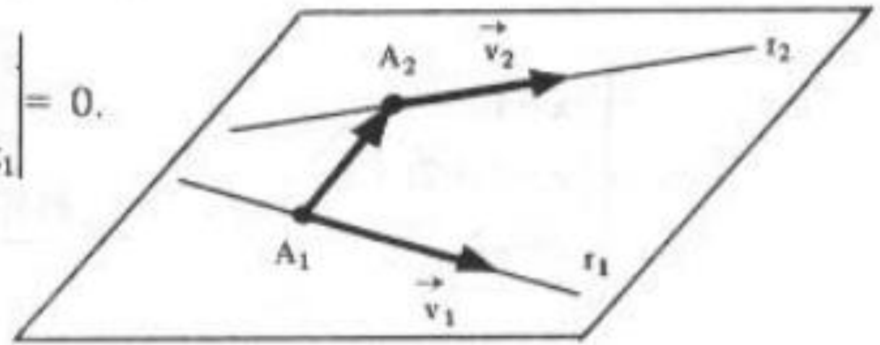
$$r_1: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{m} = \frac{3-z}{4}$$

Retas Coplanares

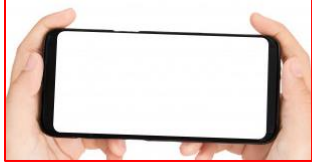


A reta r_1, que passa por um ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta r_2, que passa por um ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, são coplanares se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é, se for nulo o produto misto $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})$ (Fig. 4.10):

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$



Retas Coplanares



Exemplo – Verifique que as retas abaixo são coplanares:

$$r_1: \left\{ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \right. \quad \text{e} \quad r_2: \left\{ \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3} \right.$$