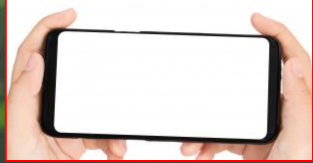
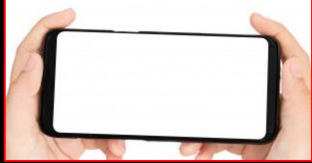


Aula 3 do 2º Bim.

G A A L

ENG. DE ALIMENTOS

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira



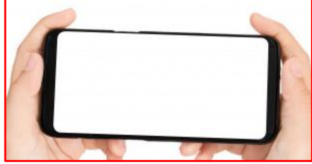
Aula 2
2º Bim.

1. Revisão da aula 3 - (Vetores em R^2);
2. Vetores em R^3 (V^3);

   Operações e propriedades;

   Produtos: Interpretação;

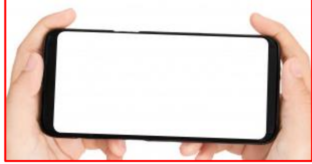
   (Paralel.; Perpendicular.)ismo;



"GEOMETRIA VETORIAL no R^3

Tratamento algébrico

Desenhando vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$



Quantos pontos são necessários?

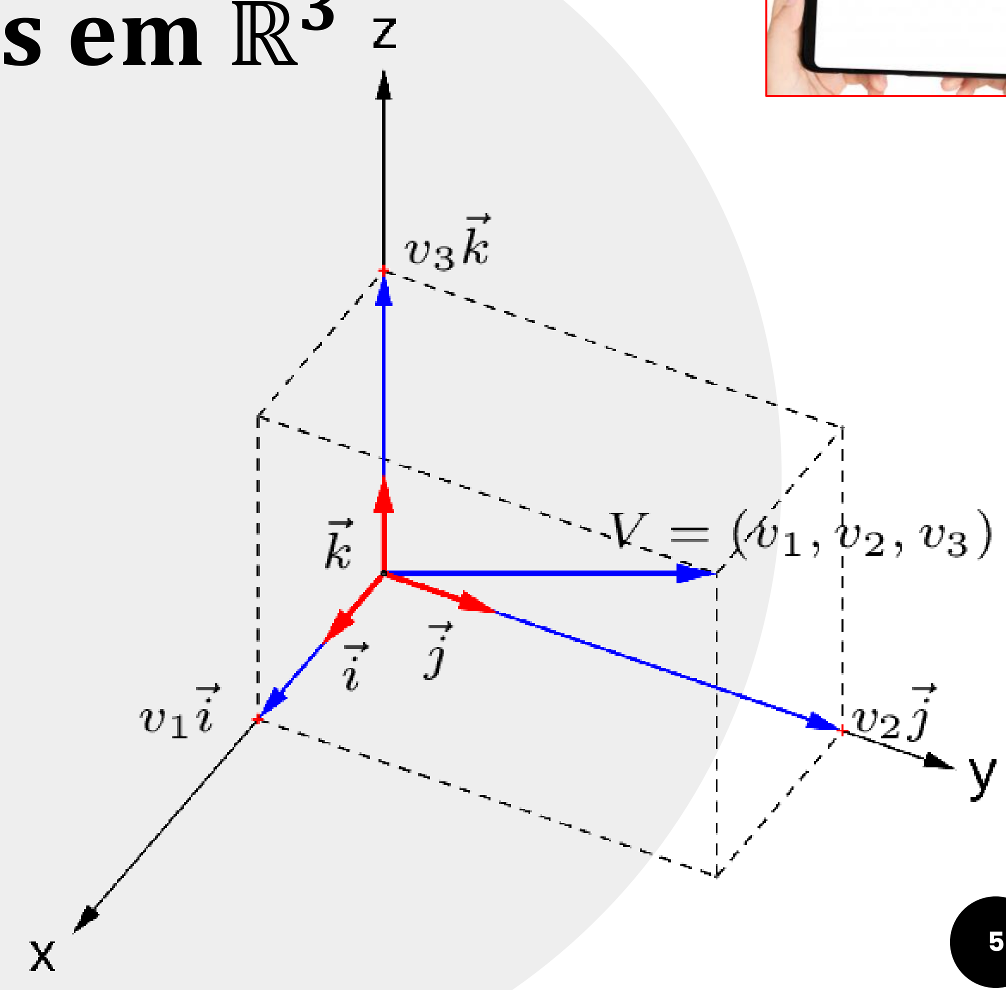
Quais os procedimentos?

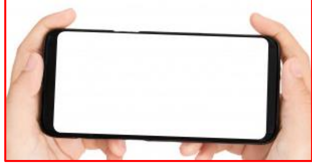
Extra: As Operações são iguais?

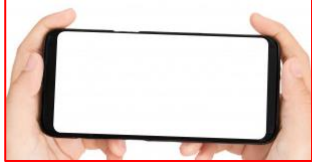
Veja os exemplos e anote

Vetores canônicos em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{i} = (1,0,0);$$
$$\vec{j} = (0,1,0);$$
$$\vec{k} = (0,0,1);$$







Exemplos

1) Represente os vetores:

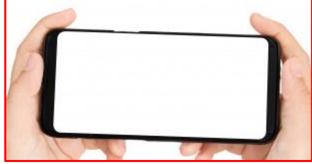
$\vec{a} = (1, 2, -3);$

$\vec{b} = (-1, 2, -1),$

$\vec{c} = (-6, -4, 2);$

$\vec{s} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c};$

Exemplos

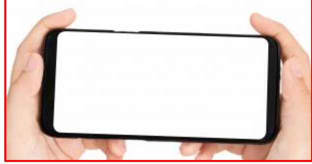


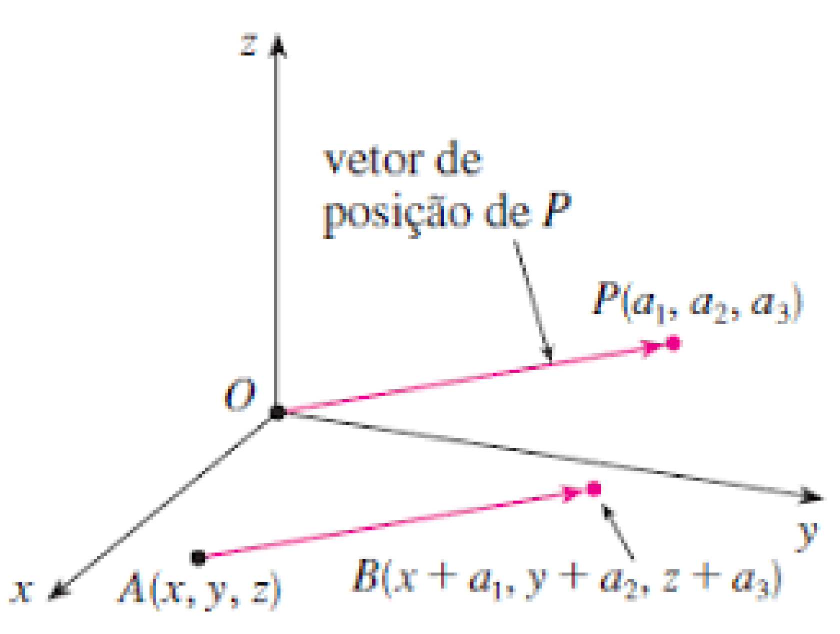
2) Represente os vetores definidos pelos pontos:

Pontos: $\boldsymbol{A = (1, -2, 2)}$ **e** $\boldsymbol{B = (-3, 2, 3)}$**;**

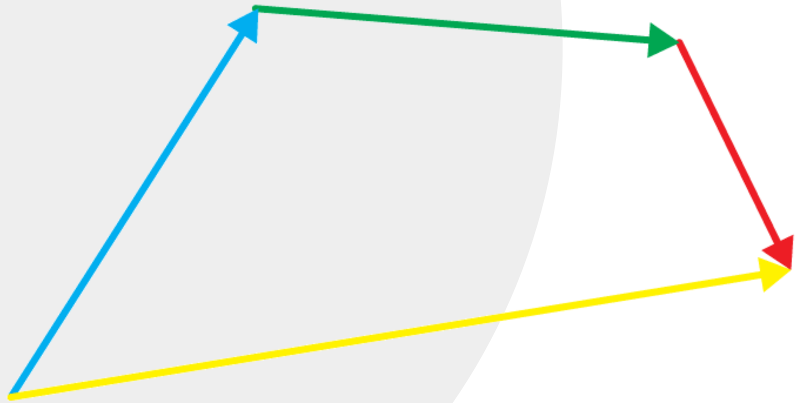
Dica: Fazer v = B – A e depois desenhar.

Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^3$ (soma e diferença igual no R²)

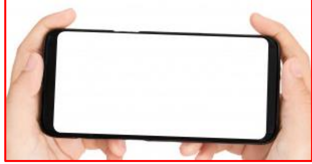




$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$$



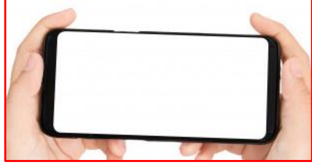
Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^3$ (soma e diferença)



$$\vec{u} = (x_u, y_u, z_u); \qquad \vec{p} = (x_p, y_p, z_p)$$

$$\boxed{\vec{u} + \vec{p} = (x_u + x_p, y_u + y_p, z_u + z_p)}$$

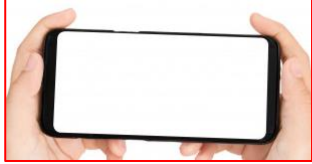
Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^3$ (mult. por escalar: k)



$$\vec{u} = (x_u, y_u, z_u); \qquad \vec{p} = (x_p, y_p, z_p)$$

$$\boxed{k.\vec{u} = (k.x_u, k.y_u, k.z_u)}$$

Relembre as propriedades



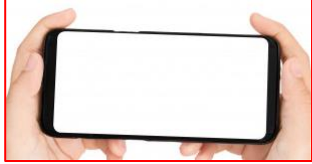
Exemplos

1) Calcule a soma de vetores:

$\vec{a} = (1, -2, -4);$ $\vec{b} = (-1, 3, -1),$

$\vec{u} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$ $\vec{s} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

Produto entre Vetores no $\mathbb{R}^3$

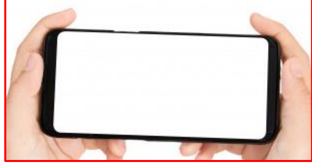


- **Produto escalar – o resultado é um escalar (número Real)**

- **Produto Vetorial – o resultado é um vetor**

- **Produto Misto – junção dos outros dois, o resultado é um número Real.**

Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$ (produto escalar)

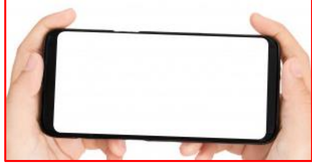


$$\vec{u} = (x_u, y_u, z_u); \qquad \vec{p} = (x_p, y_p, z_p)$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{p} = x_u . x_p + y_u . y_p + z_u . z_p}$$

Anote o exemplo a seguir...

Exemplos

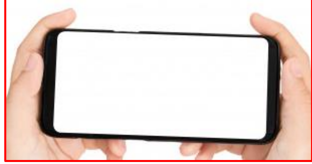


3) Encontre o produto escalar entre os vetores:

$$\vec{a} = (1, 2, -3) \text{ e } \vec{b} = (-2, 1, 2)$$

$$\vec{c} = (1, -2, 0) \text{ e } \vec{d} = (-2, 1, -4)$$

Produto Vetorial em $\mathbb{R}^3$



Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, tomados nesta ordem, chama-se *produto vetorial* dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

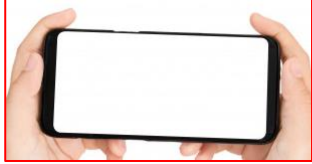
Cada componente deste vetor pode ainda ser expresso na forma de um determinante de 2ª ordem:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \qquad (3.8)$$

Uma maneira fácil de memorizar esta fórmula é utilizar a notação:

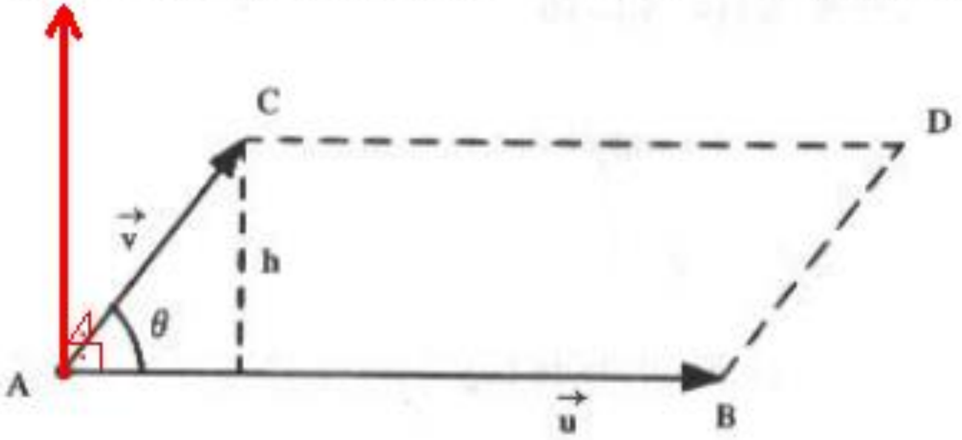
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (3.8\text{-I})$$

Veja a motivação a seguir...



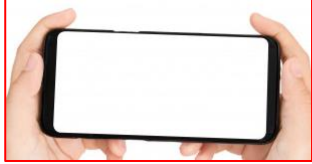
Produto Vetorial em $\mathbb{R}^3$

Geometricamente, o módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo ABCD determinado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (Fig. 3.10-a).



Anote o exemplo a seguir...

Exemplos

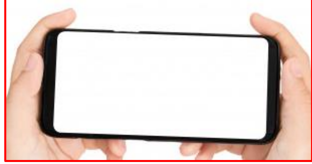


4) Encontre o produto vetorial entre os vetores:

$$\vec{a} = (1, 2, -3) \text{ e } \vec{b} = (-1, 0, 4)$$

$$\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{k} + \vec{j} \quad \text{e } \vec{d} = -2\vec{k} - 3\vec{j} + 2\vec{i}$$

Produto Misto em $\mathbb{R}^3$



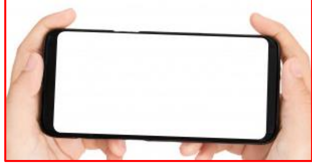
Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, tomados nesta ordem, chama-se *produto misto* dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ao número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Indica-se o produto misto por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Tendo em vista que:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

e levando em consideração a definição de produto escalar de dois vetores, o valor de $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é dado por:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Produto Misto em $\mathbb{R}^3$

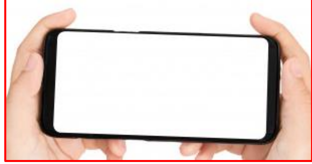


$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Anote o exemplo a seguir...



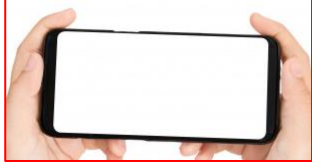
Exemplos

5) Encontre o produto misto entre os vetores:

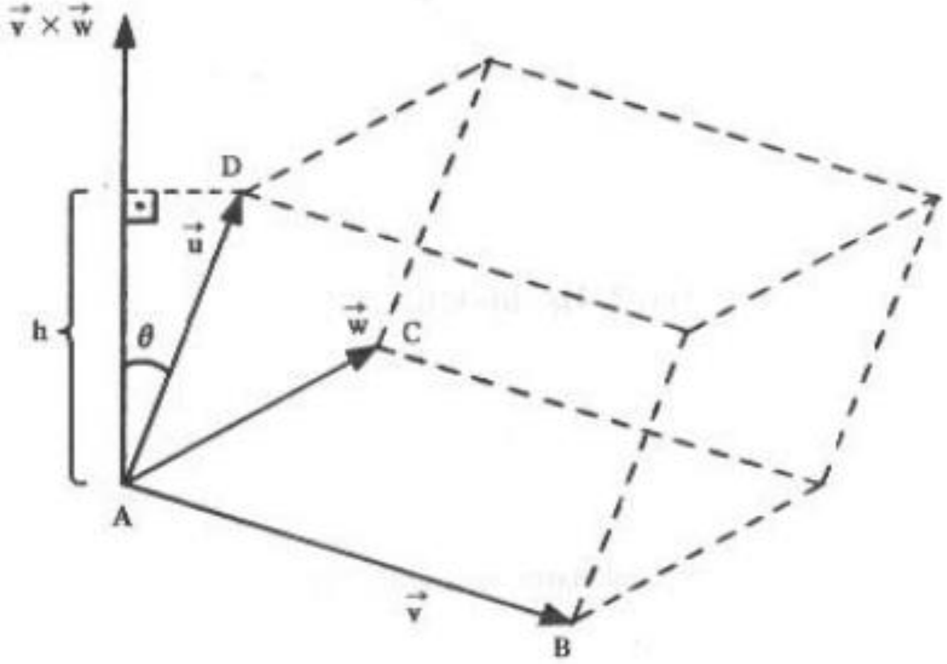
$$\vec{a} = (1, 2, -1); \quad \vec{b} = (1, 1, -3) \quad e$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{k} + \vec{j}$$

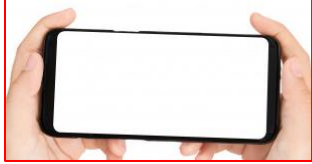
Prod. Misto em $\mathbb{R}^3$- Paralelepípedo



Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ (Fig. 3.13-a).



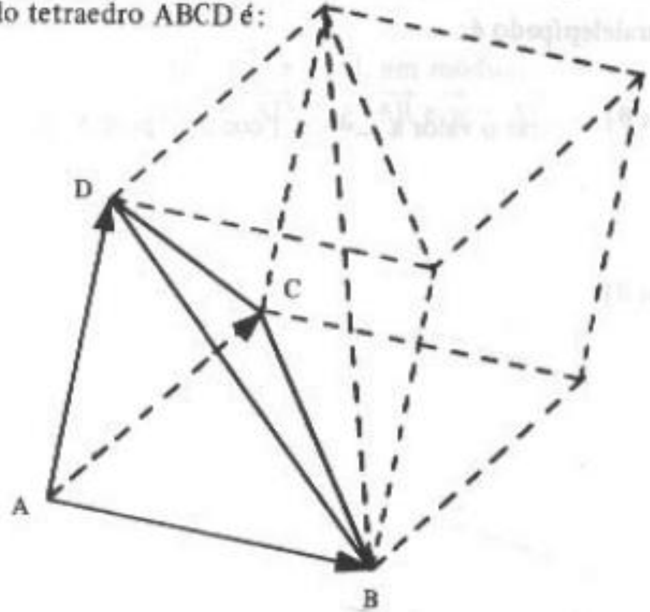
Prod. Misto em $\mathbb{R}^3$- Tetraedro



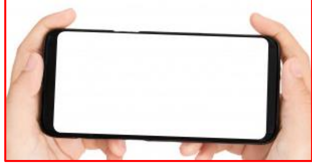
Todo paralelepípedo é equivalente a dois prismas triangulares iguais. Como todo prisma triangular equivale a três pirâmides (que no caso são tetraedros) de base e altura equivalentes à base e à altura do prisma, o volume de cada uma destas pirâmides é $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo.

Sendo A, B, C e D quatro pontos do espaço, não situados num mesmo plano, e três a três não colineares (Fig. 3.13-b), as arestas do paralelepípedo são determinadas pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ e, portanto, o volume do tetraedro ABCD é:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$



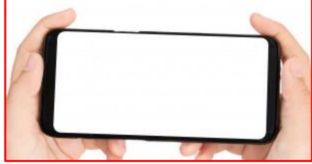
Exemplos



Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$, calcular o valor de x para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 24 u.v. (unidades de volume).

Calcular o volume do tetraedro cujos vértices são: $A(1, 2, 1)$, $B(7, 4, 3)$, $C(4, 6, 2)$ e $D(3, 3, 3)$.

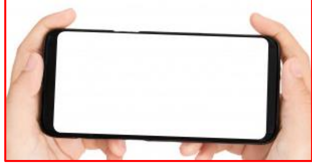
Exemplos



5) Calcule a área do triângulo com vértice nos pontos:

$$\boldsymbol{A = (5, 2, 3), B = (-2, 0, 4) \text{ e } C = (2, -3, -4)}$$

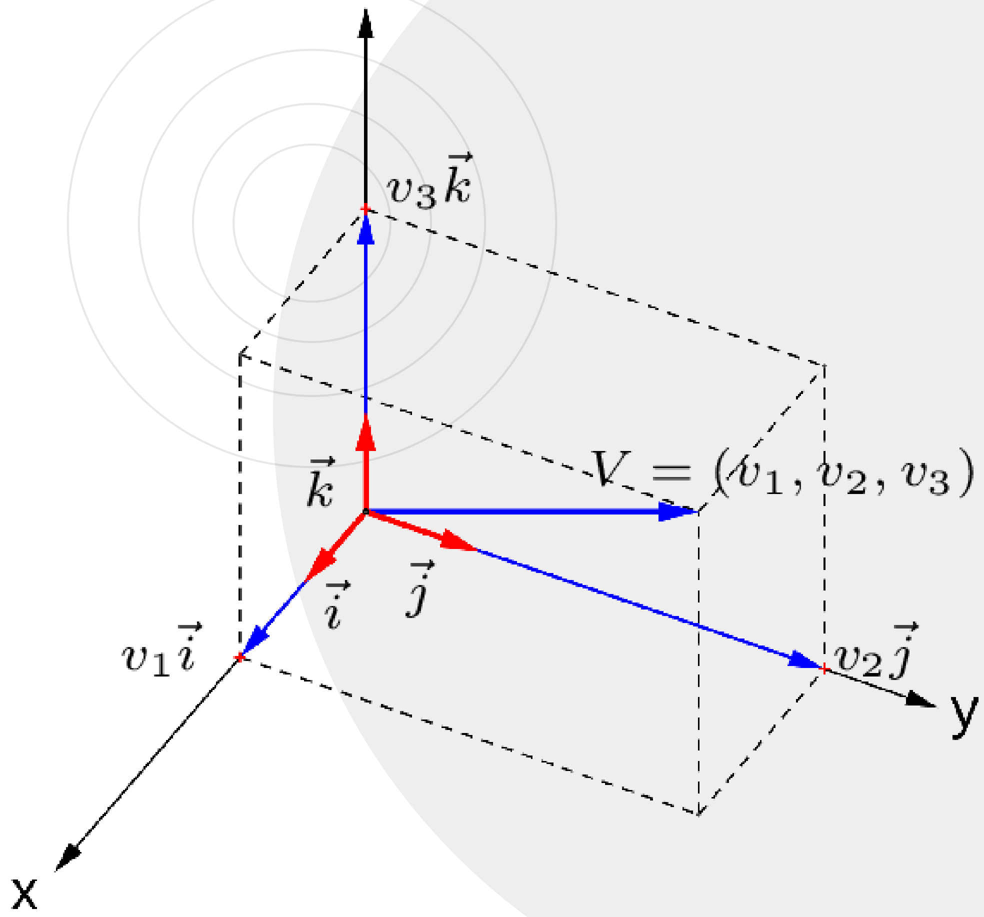
Exemplos

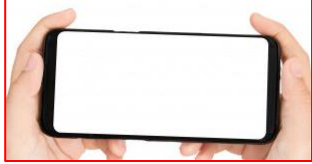


6) Qual o valor de k para que o triângulo ABC seja retângulo em B?

$$\boldsymbol{A = (5, 2, 3),\ B = (-2, k, 4)\ \text{e}\ C = (2, -3, -4)}$$

Módulo de um Vetor no $\mathbb{R}^3$

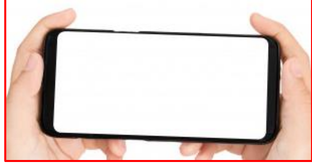




$$|\vec{v}| = \sqrt{<\vec{v}, \vec{v}>}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

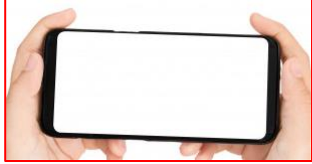
Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$



ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

Como:
$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

Temos:
$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$$

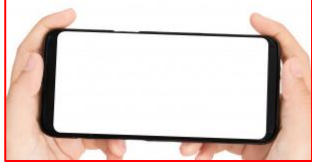


Exemplos

6) Encontre o ângulo entre os vetores:

$$\vec{a} = (1, 2, -3) \text{ e } \vec{b} = (-2, 0, 3)$$

$$\vec{c} = (1, -2, 0) \text{ e } \vec{d} = (-2, 1, -4)$$



Até a próxima aula!

Assista, pause e reflita sobre este vídeo! ☺

Leia o material sugerido (Livro e artigos)!

Busque mais informações por sua conta!

Faça os exercícios propostos o quanto antes!