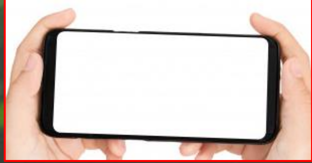
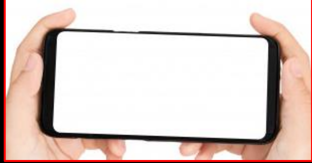
# Aula 1 – 2º Bim:



# G A A L

## ENG. DE ALIMENTOS

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

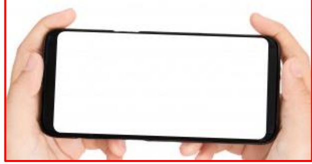


# Aula – 1
# 2º Bim.

**Correção da prova!**

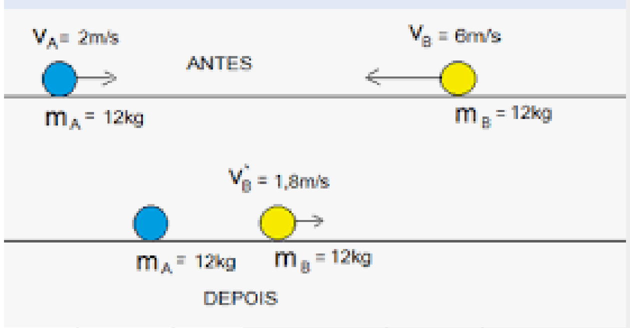
**Geometria Vetorial;**

- **Parte Geral**
- **Definição de vetor**

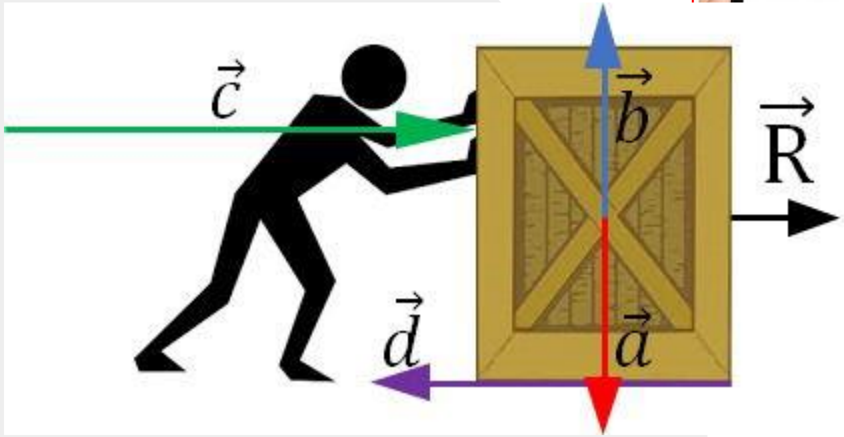


# "GEOMETRIA VETORIAL

## Tratamento geométrico

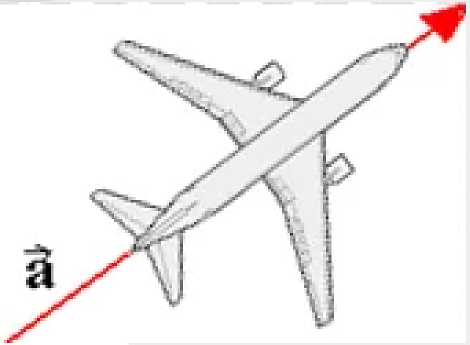


$V_A = 2m/s$
ANTES
$V_B = 6m/s$
$m_A = 12kg$
$m_B = 12kg$
$V'_B = 1,8m/s$
$m_A = 12kg$
$m_B = 12kg$
DEPOIS

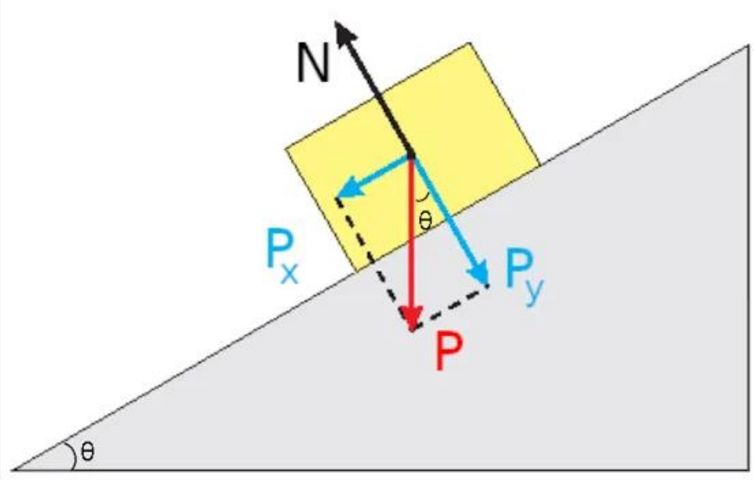



$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{R}$
$\vec{d}$
$\vec{a}$


N
NO
NE
O
L
SO
SE
S

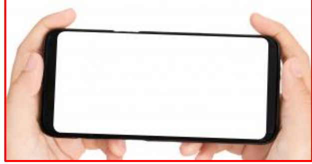



$\vec{a}$

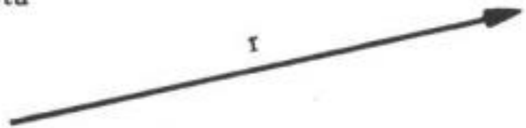
N
θ
$P_x$
$P_y$
P
θ

# Vetores parte geral:



**Reta Orientada — Eixo**

Uma reta r é orientada quando se fixa nela um sentido de percurso, considerado *positivo* e indicado por uma seta




O sentido oposto é *negativo*. Uma reta orientada é denominada *eixo.*

**Segmento Orientado**

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado *origem* do segmento, o segundo chamado *extremidade*.

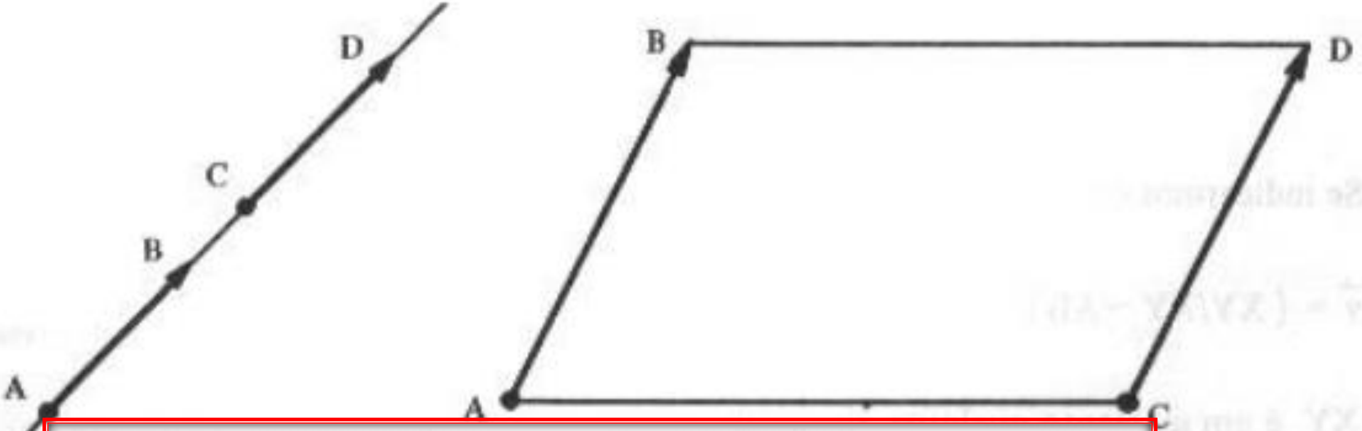
O segmento orientado de origem A e extremidade B será representado por AB e, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento (Fig. 1.2-a).

# Vetores parte geral:

## Segmentos Equipolentes

Dois segmentos orientados AB e CD são *equipolentes* quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento (Figs. 1.3-a e 1.3-b).

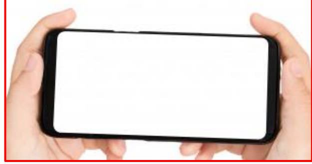
Se os segmentos AB e CD não pertencem à mesma reta, Fig. 1.3-b, para que AB seja equipolente a CD é necessário que AB//CD e AC/BD, isto é, ABCD deve ser um paralelogramo.




*a*) Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

*b*) A equipolência dos segmentos AB e CD é representada por

$$AB \sim CD$$



# Vetores parte geral:

**Propriedades da Equipolência**

I) $AB \sim AB$ (reflexiva).

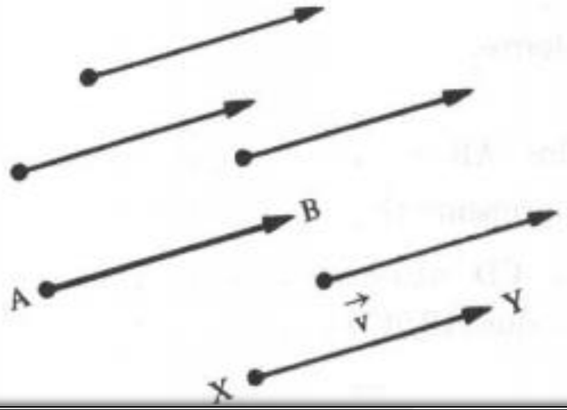
II) Se $AB \sim CD$, $CD \sim AB$ (simétrica).

III) Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, $AB \sim EF$ (transitiva).

IV) Dado um segmento orientado $AB$ e um ponto $C$, existe um único ponto $D$ tal que $AB \sim CD$.

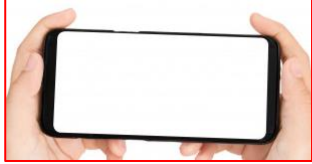
## DEFINIÇÃO DE VETORES

Vetor determinado por um segmento orientado $AB$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $AB$ (Fig. 1.4-a).




Se indicarmos com $\vec{v}$ este conjunto, simbolicamente poderemos escrever: $\vec{v} = \{XY / XY \sim AB\}$

# Vetores parte geral:



### 1.4.1 Vetores Iguais

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, $AB \sim CD$.

### 1.4.2 Vetor Nulo

Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um *único* vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero, e que é indicado por $\vec{0}$.

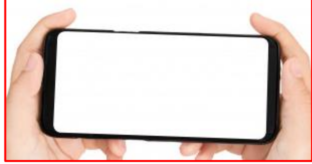
### 1.4.3 Vetores Opostos

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

### 1.4.5 Versor

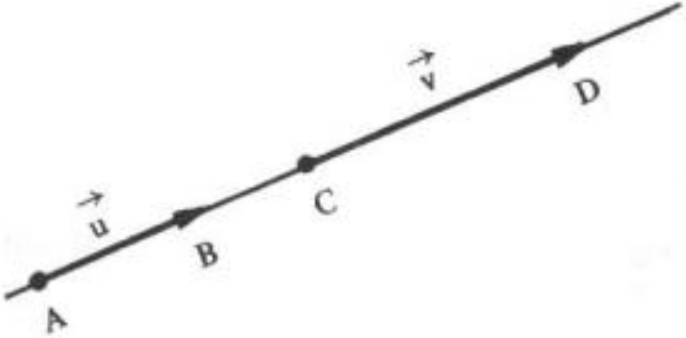
*Versor* de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

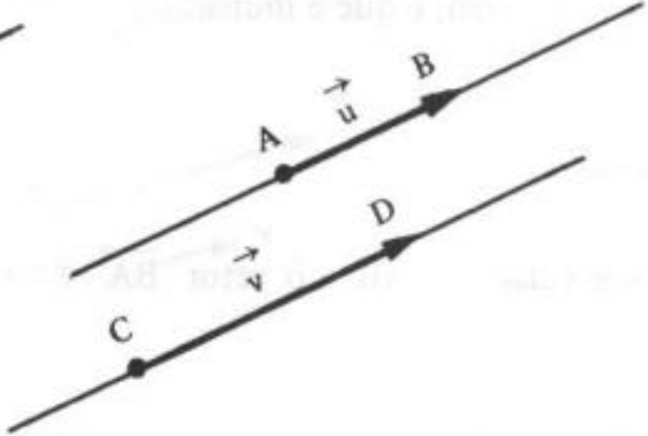
# Vetores parte geral:



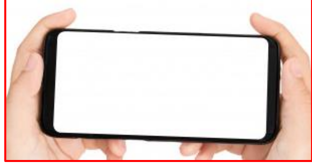
### 1.4.6 Vetores Colineares

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *colineares* se tiverem a *mesma direção*. Em outras palavras: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas (Fig. 1.4-c).



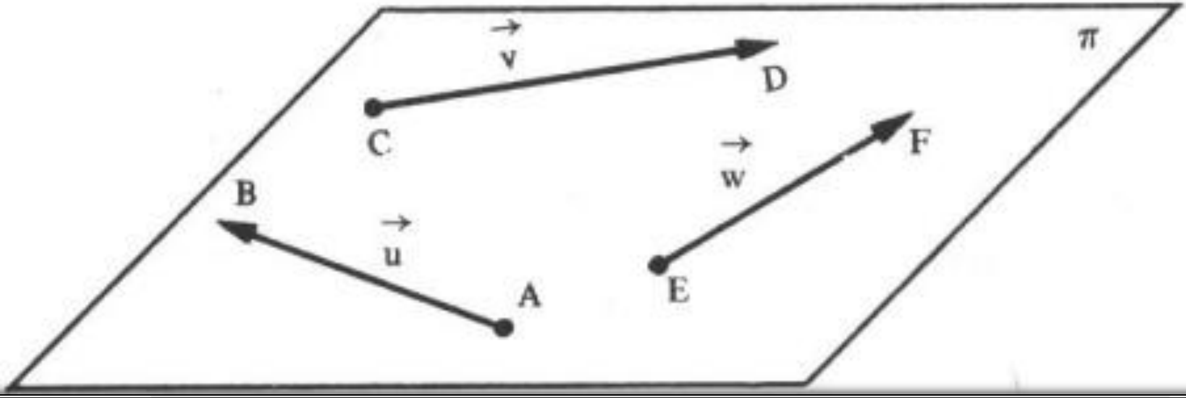



# Vetores parte geral:

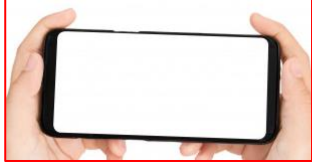


### 1.4.7 Vetores Coplanares

Se os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (o número de vetores não importa) possuem representantes AB, CD e EF pertencentes a um mesmo plano $\pi$ (Fig. 1.4-d), diz-se que eles são *coplanares*.

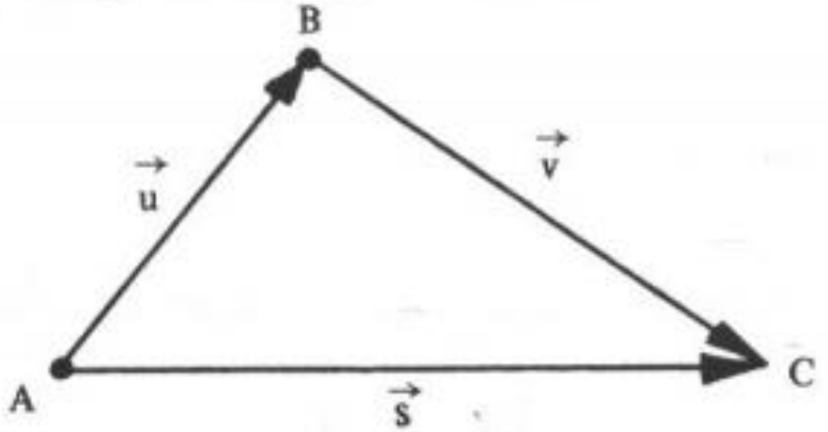


# Vetores parte geral: OPERAÇÕES

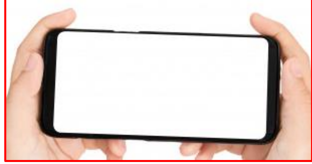


### 1.5.1 Adição de Vetores

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC (Fig. 1.5-a).



# Propriedades da soma



**Propriedades da adição**

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo o vetor $\vec{v}$ se tem:

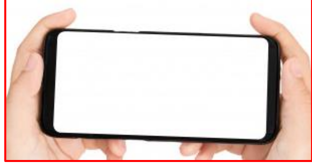
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

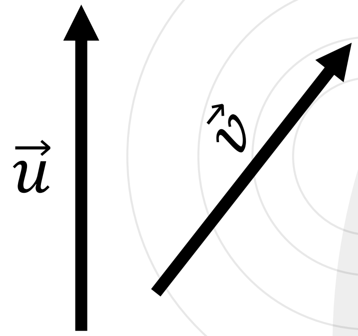
IV) Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um só vetor $-\vec{v}$ (vetor oposto de $\vec{v}$) tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}.$$

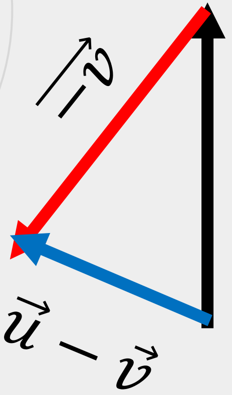
Chama-se *diferença* de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e se representa por $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$, ao vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$.

# Soma x Subtração de vetores

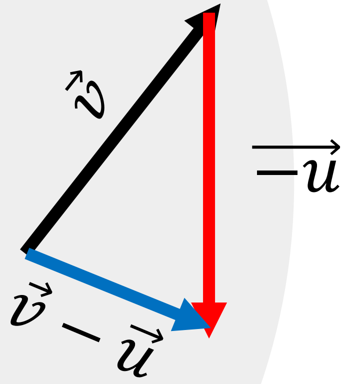





$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

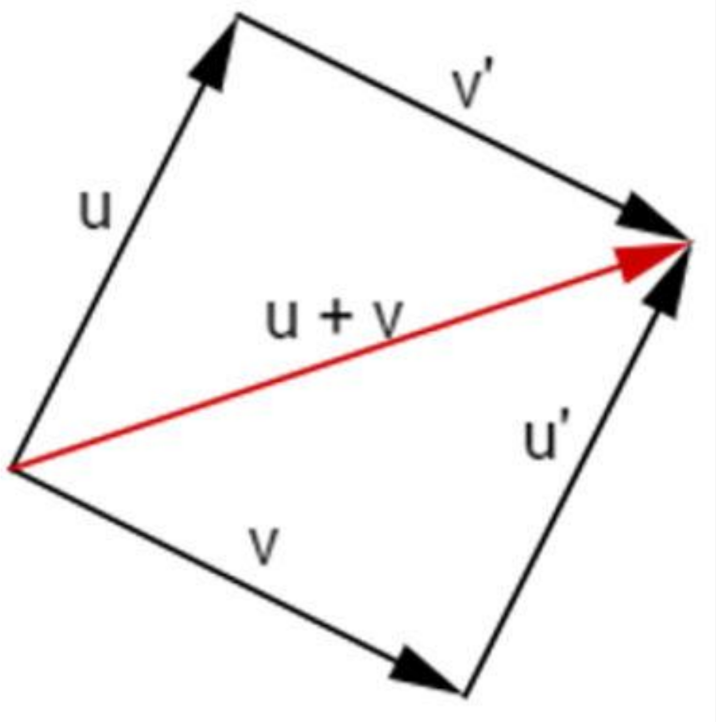


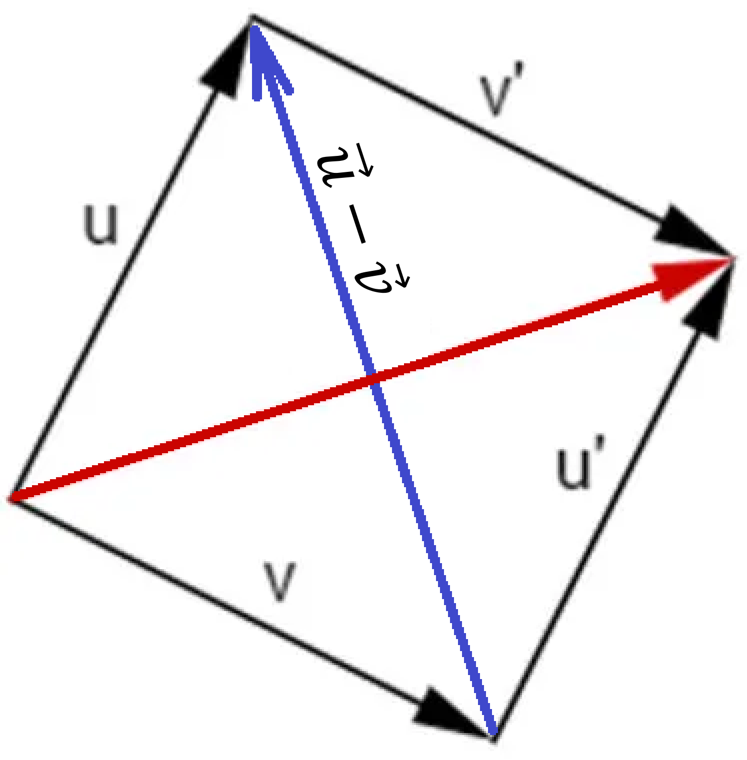

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

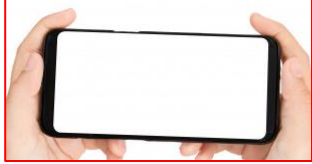



$$\vec{v} - \vec{u} = -(\vec{u} - \vec{v})$$

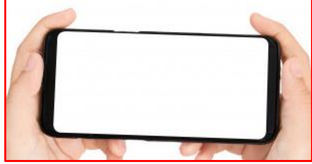
# Regra do Paralelogramo



# Vetores parte geral: OPERAÇÕES



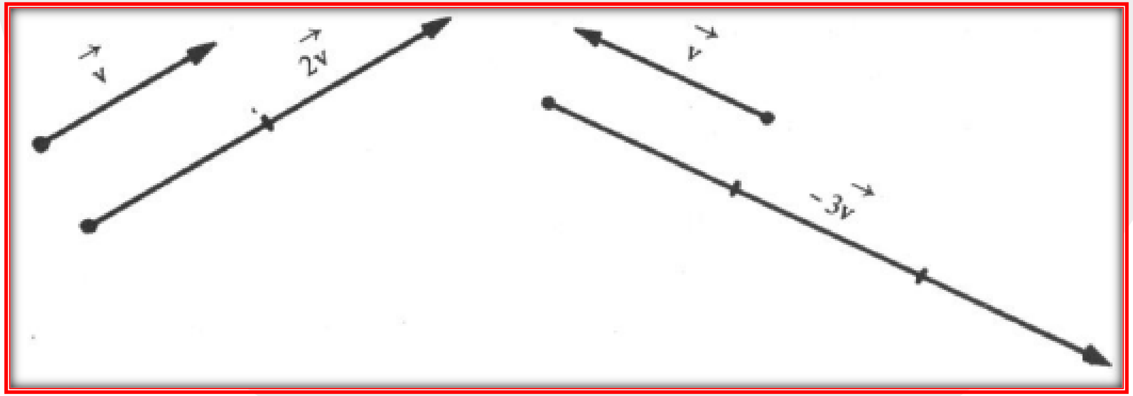
**1.5.3 Multiplicação por um Número Real**

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se *produto do número real $k$ pelo vetor $\vec{v}$* o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

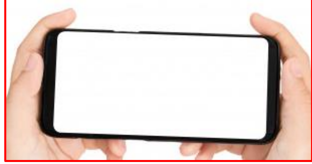
*a*) módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$;

*b*) direção: a mesma de $\vec{v}$;

*c*) sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se $k > 0$, e contrário ao de $\vec{v}$ se $k < 0$ (Fig. 1.5-d).

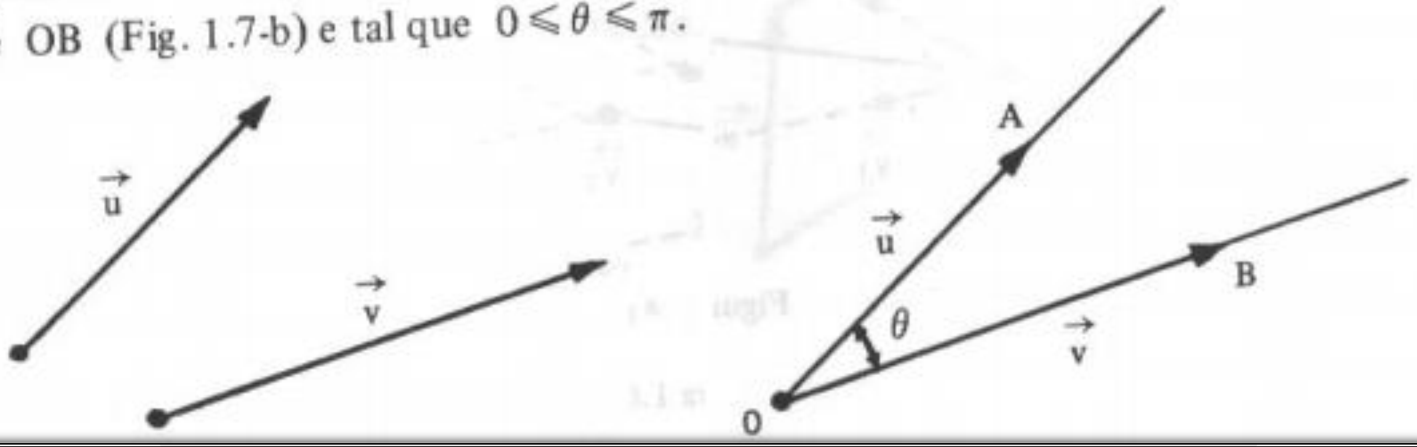


# Vetores parte geral: OPERAÇÕES

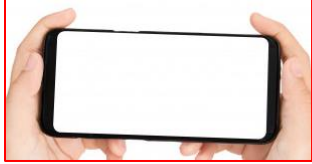


## 1.7 Ângulo de Dois Vetores

O *ângulo de dois vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos (Fig. 1.7-a) é o ângulo $\theta$ formado pelas semi-retas OA e OB (Fig. 1.7-b) e tal que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.



# Desenhando vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$



**Quantos pontos são necessários?**

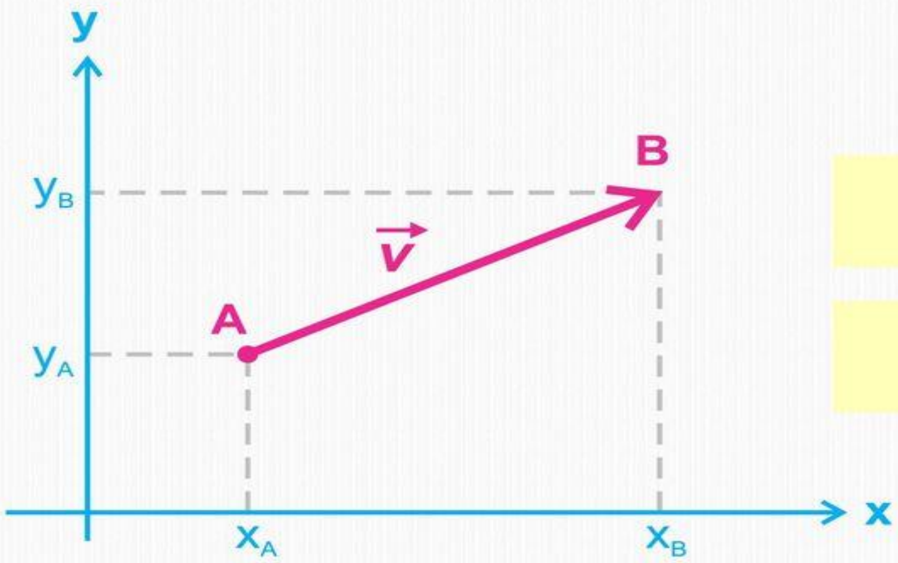
**Quais os procedimentos?**

**Extra: As Operações são iguais?**

Veja os exemplos e anote

# VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS – $\mathbb{R}^2$

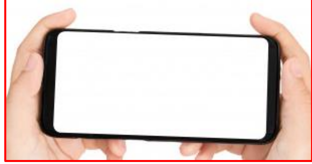
*Podemos determinar as coordenadas um vetor, a partir de dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, da seguinte forma:*

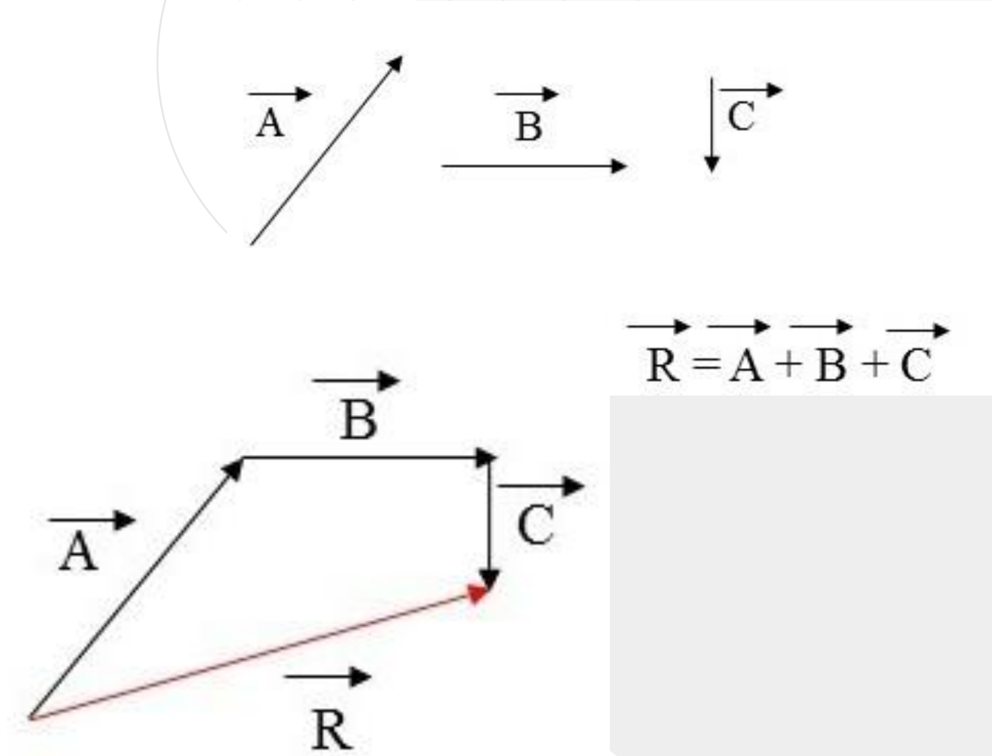


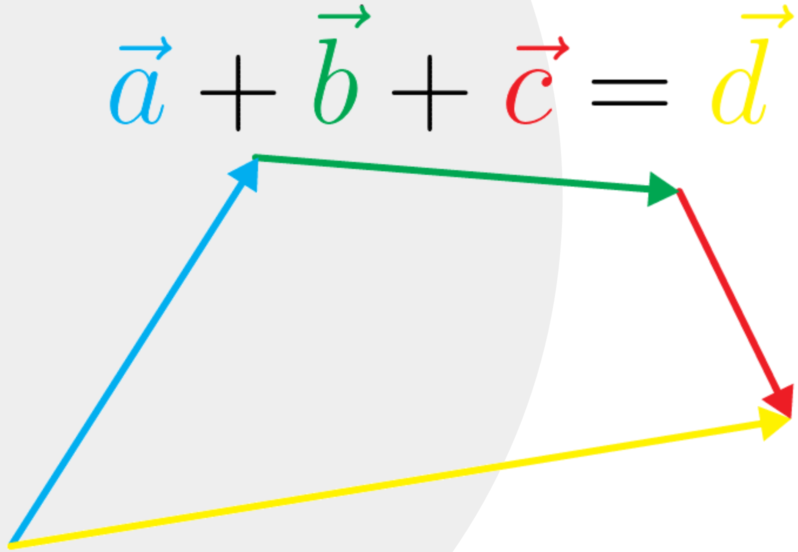

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

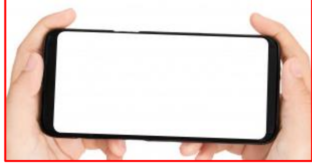
# Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$ (soma e diferença)





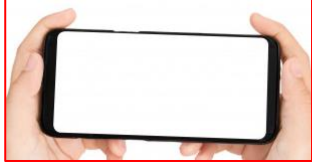
# Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$ (soma e diferença)



$$\vec{u} = (x_u, y_u); \qquad \vec{p} = (x_p, y_p)$$

$$\boxed{\vec{u} + \vec{p} = (x_u + x_p, y_u + y_p)}$$

# Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$ (mult. Por escalar)

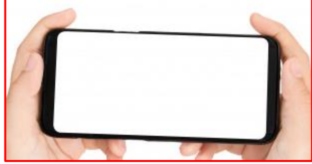


$$\vec{u} = (x_u, y_u); \qquad \vec{p} = (x_p, y_p)$$

$$\boxed{k.\vec{u} = (k.x_u, k.y_u)}$$

Relembre as propriedades

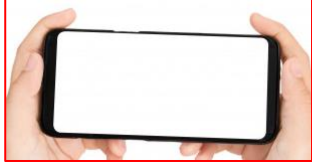
# Exemplos



## 1) Represente os vetores:

$\vec{a} = (1, 2);$ $\vec{b} = (2, -1),$

$\vec{c} = (-6, -3);$ $\vec{s} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c};$



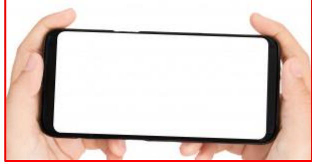
# Exemplos

## 2) Represente os vetores definidos pelos pontos:

**Pontos:** $A = (1, -2); B = (2, 4);$ C $= (-3, 1)$ **e**

**Vetores:** $\vec{v} = AB, \overrightarrow{m} = BA, \vec{n} = 2(AC - BC)$

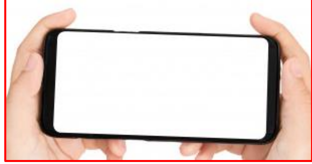
# Produto entre Vetores no $\mathbb{R}^2$



- **Produto escalar – o resultado é um escalar (número Real)**

- **Produto Vetorial – o resultado é um vetor**

# Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$ (produto escalar)

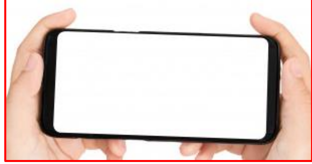


$$\vec{u} = (x_u, y_u); \qquad \vec{p} = (x_p, y_p)$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{p} = x_u . x_p + y_u . y_p}$$

Anote o exemplo a seguir...

# Exemplos



**5) Calcule o produto escalar entre os vetores:**

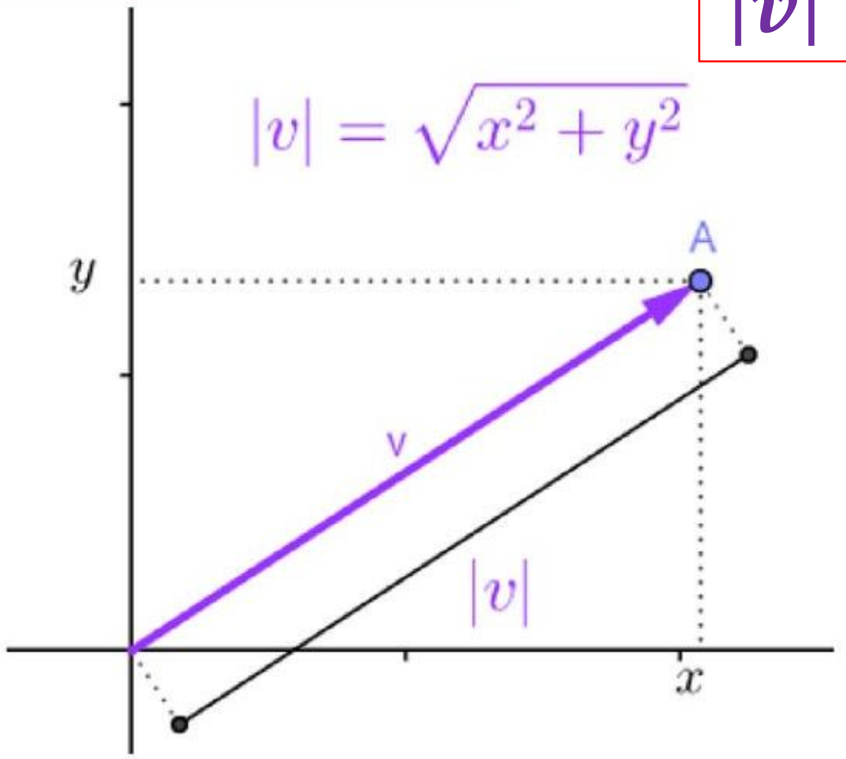
$$\vec{a} = (1, 2) \text{ e } \vec{b} = (2, -3)$$

$$\vec{c} = (1, -2) \text{ e } \vec{d} = (-2, 1)$$

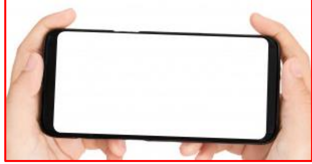
# Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$

## Módulo de um Vetor

$$|\vec{v}| = \sqrt{<\vec{v}\,,\vec{v}>}$$



# Operações entre Vetores no $\mathbb{R}^2$

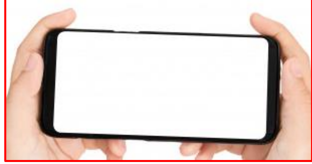


## ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

Como : $$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

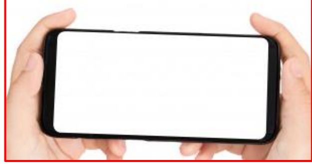
Temos : $$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$$

# Exemplos



**1) Desenhe os vetores, encontre a norma de cada e o ângulo entres eles.**

$$\vec{a} = (1, 2); \qquad \vec{b} = (2, -3),$$



# Até a próxima aula!

Assista, pause e reflita sobre este vídeo! ☺

Leia o material sugerido (Livro e artigos)!

Busque mais informações por sua conta!

Faça os exercícios propostos o quanto antes!