Aula 5 – 2º Bim.

CÁLCULO 1

ENG. DE ALIMENTOS

Prof. Dr. Paulo A. Oliveira

Aula 5 – 2º Bim

- ✓ **Antiderivada**
- ✓ **Integral definida**
- ✓ **Áreas por integrais**
- ✓ **Teorema Fundamental do Cálculo**

Antiderivada - Definição

Uma função F será chamada de **antiderivada** de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplo:

$$\frac{d(sen(x))}{dx} = \cos(x)$$

$$\int \cos(x)\, dx = sen(x) + c$$

Antiderivada - Definição

Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escrevemos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x) \qquad d(F(x)) = f(x)\,dx \tag{4}$$

Caso Geral:

$$\int \mathrm{f}(x)\,dx = F(x) + \mathrm{c}$$

$$F'(x) = f(x)$$

Antiderivada - Teoremas

$$\int dx = x + C$$

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

onde a é uma constante.

Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

Antiderivada - Teoremas

Se n for um número racional,

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}\,x + C$$

$$\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\text{cotg}\,x + C$$

$$\int \sec x\,\text{tg}\,x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \text{cosec}\,x\,\text{cotg}\,x\,dx = -\text{cosec}\,x + C$$

Antiderivada – Tabela (Derivadas)

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u\, D_x v + v\, D_x u$
4. $D_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\, D_x u - u\, D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a\, D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \dfrac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\text{sen } u) = \cos u\, D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\text{sen } u\, D_x u$
10. $D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u\, D_x u$
11. $D_x(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 u\, D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \text{ tg } u\, D_x u$
13. $D_x(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \text{ cotg } u\, D_x u$
14. $D_x(\text{sen}^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
16. $D_x(\text{tg}^{-1} u) = \dfrac{1}{1 + u^2} D_x u$
17. $D_x(\text{cotg}^{-1} u) = \dfrac{-1}{1 + u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
19. $D_x(\text{cosec}^{-1} u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
20. $D_x(\text{senh } u) = \cosh u\, D_x u$
21. $D_x(\cosh u) = \text{senh } u\, D_x u$
22. $D_x(\text{tgh } u) = \text{sech}^2 u\, D_x u$
23. $D_x(\text{cotgh } u) = -\text{cosech}^2 u\, D_x u$
24. $D_x(\text{sech } u) = -\text{sech } u \text{ tgh } u\, D_x u$
25. $D_x(\text{cosech } u) = -\text{cosech } u \text{ cotg } u\, D_x u$

Antiderivada – Tabela

59. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$

60. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

61. $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + C$

62. $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

63. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C = \ln|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u)| + C$

64. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C = \ln|\operatorname{tg} \frac{1}{2}u| + C$

65. $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$

66. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + C$

67. $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

68. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

69. $\int \operatorname{sen}^2 u \, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

70. $\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

71. $\int \operatorname{tg}^2 u \, du = \operatorname{tg} u - u + C$

72. $\int \operatorname{cotg}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u - u + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$

74. $\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u \, du$

75. $\int \operatorname{tg}^n u \, du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u \, du$

76. $\int \operatorname{cotg}^n u \, du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u \, du$

77. $\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u \, du$

78. $\int \operatorname{cosec}^n u \, du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} u \, du$

79. $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu \, du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

80. $\int \cos mu \cos nu \, du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} mu \cos nu \, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

Exercício 1

Encontre as antiderivadas abaixo:

$$a)\int x^2dx$$

$$b)\int x^{-1}dx$$

$$c)\int \cos(x)dx$$

$$d)\int 3x+e^xdx$$

Exercícios

Encontre as antiderivadas abaixo:

$$e) \int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$f) \int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}} dt$$

Integral definida

Se f for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a **integral definida** de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, será dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\,\Delta_i x \qquad (5)$$

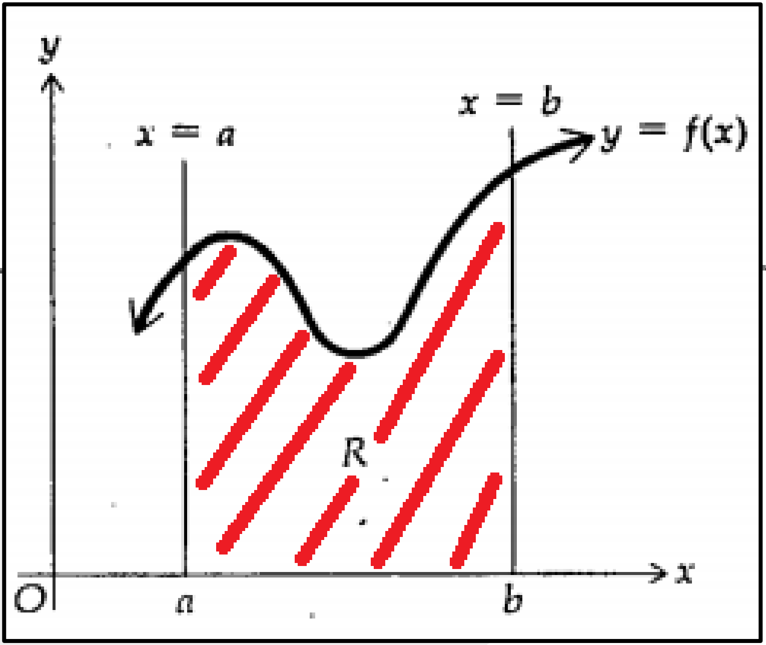
se o limite existir.

Integral definida

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

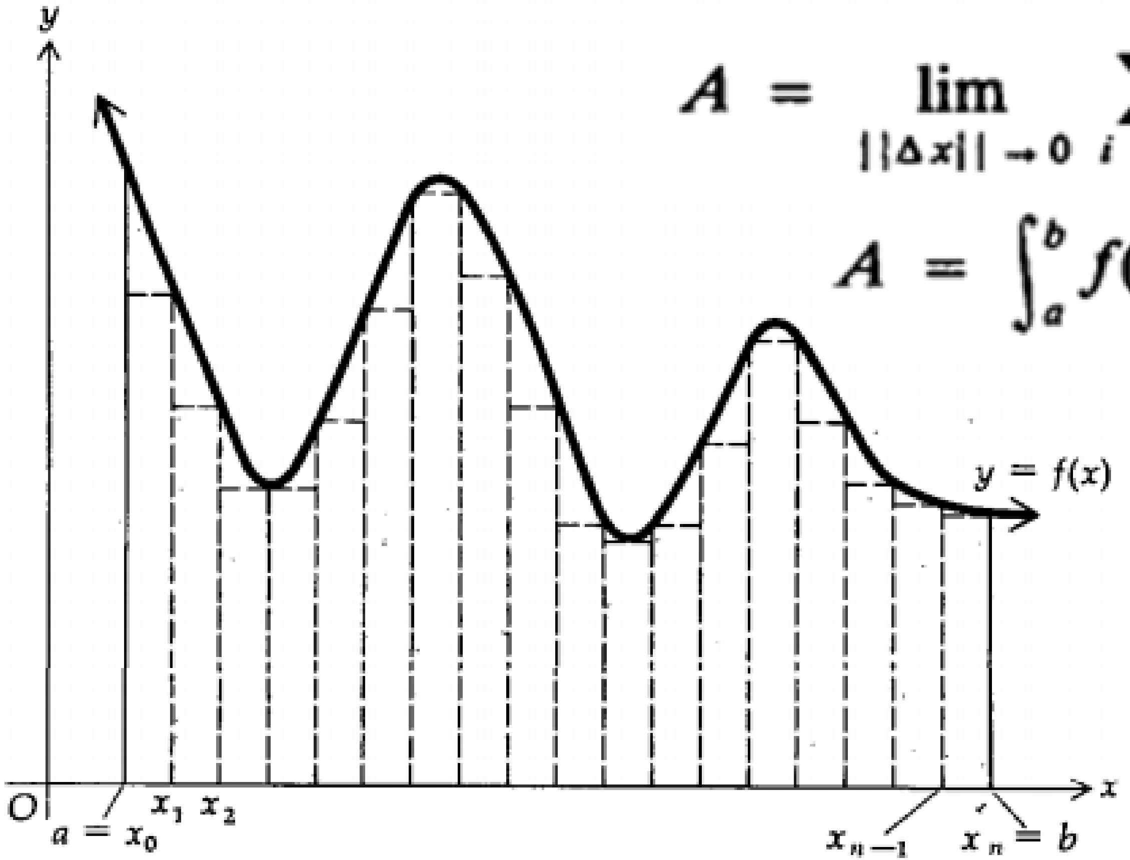
$$\Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)\, dx$$



Integral definida

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$



Exemplo - Integral definida

Ache o valor exato da integral definida $\int_1^3 x^2\, dx$.

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n}, \xi_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \xi_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

Como $f(x) = x^2$,

$$f(\xi_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2$$

Exemplo - Integral definida

$$\int_1^3 x^2\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 4ni + 4i^2)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 n + 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3} \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2} \right]$$

Exemplo - Integral definida

Ache o valor exato da integral definida $\int_1^3 x^2\,dx$.

$$\int_1^3 x^2\,dx = \lim_{n \to +\infty}\left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right]$$

$$= 6 + 0 + \tfrac{8}{3} + 0 + 0$$

$$= \tfrac{26}{3}$$

Teorema Fund. Do Cálc.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x)$$

para todo x em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

(Se $x = a$, a derivada em (8) pode ser uma derivada à direita e se $x = b$, a pode ser uma derivada à esquerda.)

Integra x Derivadas

Exercício 2

Encontre as integrais abaixo:

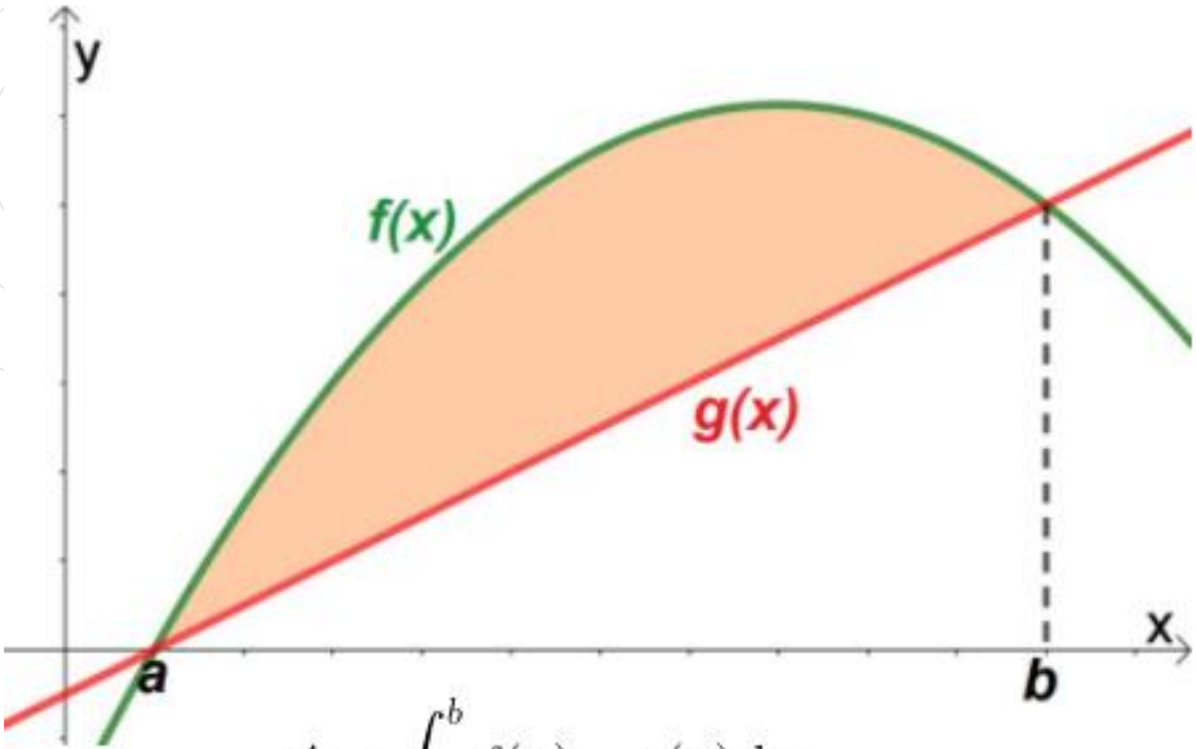
$$a)\int_{1}^{3} x^2 dx$$

$$b)\int_{0}^{6} (2x)dx$$

$$c)\int_{0}^{3,14} cos(x)dx$$

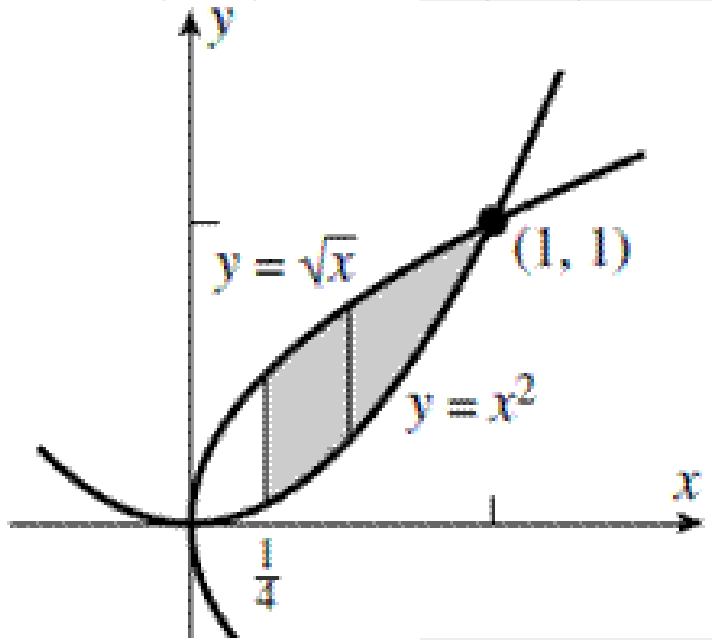
$$d)\int_{0}^{1,5} (e^x - 3x)dx$$

Área entre funções (curvas)



$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Exemplo: Área entre funções



$$\int_{0,25}^{1} (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{0,25}^{1} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{0,25}^{1}$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt[2]{0,25^3} + \frac{0,25^3}{3}\right) = \frac{49}{192}$$

OBRIGADO por sua atenção!

- Assista, pause e reflita sobre este vídeo! ☺
- Leia o material sugerido (Livro e artigos)!
- Busque mais informações por sua conta!
- Faça os exercícios propostos o quanto antes!